



**UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR
DEPARTAMENTO DE MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS Y TEORÍA DE ESTRUCTURAS**

**PROYECTO FIN DE CARRERA
INGENIERÍA INDUSTRIAL**

ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE UNA PALA DEL ROTOR DE UN HELICÓPTERO MEDIO

Autor:

Mario Fernández Gómez

Director:

Enrique Barbero Pozuelo

Madrid, Junio 2010

“Este proyecto no habría sido posible sin la ayuda de mis padres. Ellos me han ayudado en todo momento y ha sido todo mucho más fácil gracias a su apoyo. Además, también quiero agradecerle a Andrea que ella sea quien me acompañe en este viaje que es la vida porque ella es la que la llena de luz”

ÍNDICE

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN	1
1.1 MOTIVACIÓN	1
1.2 OBJETIVOS	3
1.3 DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO	4
CAPÍTULO 2: IDEAS GENERALES SOBRE HELICÓPTEROS	5
2.1 INTRODUCCIÓN	5
2.2 CLASIFICACIÓN DE LOS HELICÓPTEROS	6
2.3 ELEMENTOS CONSTITUTIVOS DE LOS HELICÓPTEROS	7
2.4 EVOLUCIÓN DE LOS HELICÓPTEROS	10
CAPÍTULO 3. EL ROTOR	14
3.1 TERMINOLOGÍA	14
3.2 TIPOS DE ROTOR	16
3.3 PERFILES	19
3.3.1 Terminología del perfil	20
3.3.2 Elección del perfil	21
3.3.3 Nomenclatura NACA	22
3.4 LA PALA	23
3.4.1 El número de palas	23
3.4.2 Composición tecnológica de la pala	25
3.4.3 Palas de helicópteros en uso	25
3.5 DISEÑO DEL HELICÓPTERO	27
3.5.1 El problema del par principal	27
3.5.2 El problema de la alta velocidad	28
CAPITULO 4: PARÁMETROS DE DISEÑO	30
4.1 INTRODUCCIÓN	30
4.2 DETERMINACIÓN DE PARÁMETROS	31
4.2.1 Definición de parámetros	34
4.2.2 Carga aerodinámica	37
4.3 DEFINICIÓN DEL PERFIL Y MATERIALES	43
4.3.1 Diseño del perfil	43

4.3.2 Diseño del laminado	45
---------------------------	----

CAPÍTULO 5: CÁLCULO DE LOS PARÁMETROS DE LA SECCIÓN	47
5.1 INTRODUCCIÓN	47
5.2 CÁLCULO DE LA RIGIDEZ	48
5.3 CÁLCULO DE LA MASA ESPECÍFICA	56
5.4 RESUMEN DE PARÁMETROS	57
5.5 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS PARÁMETROS	58

CAPÍTULO 6: CÁLCULO ESTÁTICO	60
6.1 INTRODUCCIÓN	60
6.2 FLEXIÓN DE LAS PALAS	61
6.2.1 Introducción	61
6.2.2 Ecuación de la elástica	62
6.2.3 Transformación en una ecuación integrodiferencial	66
6.2.4 Adimensionalización	69
6.2.5 Solución de la ecuación de la elástica - Método de colocación	75
6.2.6 Leyes de esfuerzos	79
6.2.7 Resolución de paredes delgadas de material compuesto	82
6.2.8 Criterio de rotura	86
6.3 RESULTADOS	86
6.3.1 Selección de los puntos de colocación	87
6.3.2 Solución de la elástica	91
6.3.3 Comparación entre distribución de carga aerodinámica	98

CAPÍTULO 7: ANÁLISIS DINÁMICO	104
7.1 INTRODUCCION	104
7.2 VIBRACIONES DE LAS PALAS	105
7.2.1 Vibraciones libres de la pala	105
7.2.2 Palas sin rotación	110
7.2.3 Diagrama de resonancia generalizado	114
7.3 RESULTADOS	116

CAPÍTULO 8: CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS	123
8.1 RESUMEN Y CONCLUSIONES	123

8.2 TRABAJOS FUTUROS	124
BIBLIOGRAFÍA	125
ANEXO A. PROGRAMAS DE MATLAB	127
ANEXO B. HELICÓPTEROS	143

INTRODUCCIÓN

1.1 MOTIVACIÓN

Este proyecto consiste en el diseño preliminar de la pala de un helicóptero medio. El rotor es el componente que proporciona la sustentación al helicóptero para que éste pueda volar. Es el encargado de producir todos los desplazamientos para que el helicóptero pueda moverse. Por eso, el rotor es uno de los elementos constitutivos más importantes del helicóptero.

Las palas de los helicópteros se fabrican de materiales convencionales o compuestos. Los materiales convencionales han sido utilizados a lo largo de la historia. Sin embargo, en la actualidad está desapareciendo su utilización en favor de los materiales compuestos. Se han hecho hueco dentro de las industrias aeronáuticas debido a que tienen una serie de ventajas respecto a los materiales convencionales como pueden ser las relaciones resistencia/peso y rigidez/peso. Además, otras de las ventajas que presentan son el buen comportamiento a fatiga y la estabilidad dimensional. Por el contrario la gran desventaja de éstos es su alto precio.

Cuando se construye las palas de los helicópteros en materiales compuestos la configuración más utilizada en la aeronáutica es la sándwich. Este tipo viga rotatoria tiene como característica una elevada rigidez a flexión con un bajo peso. Esto es debido, por una parte, a que su momento de inercia es elevado ya que la geometría de esta sección dispone las pieles a una cierta distancia de su centro geométrico. Y por otra parte, la relación módulo de elasticidad aparente frente a densidad de las pieles es muy elevada. Además el núcleo que es quien soporta los esfuerzos cortantes presenta una densidad muy baja. Frente a esta configuración, las palas de los helicópteros pueden estar conformadas únicamente por laminados siendo hueco el núcleo. A este tipo de secciones se les denomina cajón. Las ventajas que aportan estas secciones son similares a las tipo sándwich. Por tanto, el estudio de esta configuración puede resultar muy interesante.

El objeto de los diseños preliminares es realizar un estudio inicial que posteriormente puede servir para abordar el problema de una manera más exhaustiva. Los modelos analíticos son técnicas más sencillas de utilizar que otras técnicas. Aun así, el modelo analítico seguido en el presente documento es considerablemente exacto. Existen otros métodos para el diseño de la pala de un helicóptero, como puede ser los elementos finitos, que se ajustan bastante a la realidad, sin embargo, a la hora de introducir y obtener valores son mucho más difíciles de utilizar. Por lo que, la utilización de modelos analíticos tiene ventajas significativas con respecto a otras técnicas.

El diseño de las palas de un helicóptero es complejo ya que requiere el estudio de varias disciplinas. Es primordial que las palas cumplan con los requerimientos para los que ha sido diseñado. Por tanto, parece evidente que deben operar con seguridad. Por ello, el cálculo estructural es una disciplina primordial dentro del estudio de las palas. Dentro del cálculo estructural es interesante el cálculo estático para poder dimensionar las palas soportando éstas las solicitaciones externas. Además, también resulta atractivo el cálculo dinámico debido a que es importante a que regímenes de rotor se produce resonancia para tomar medidas y así evitarlo.

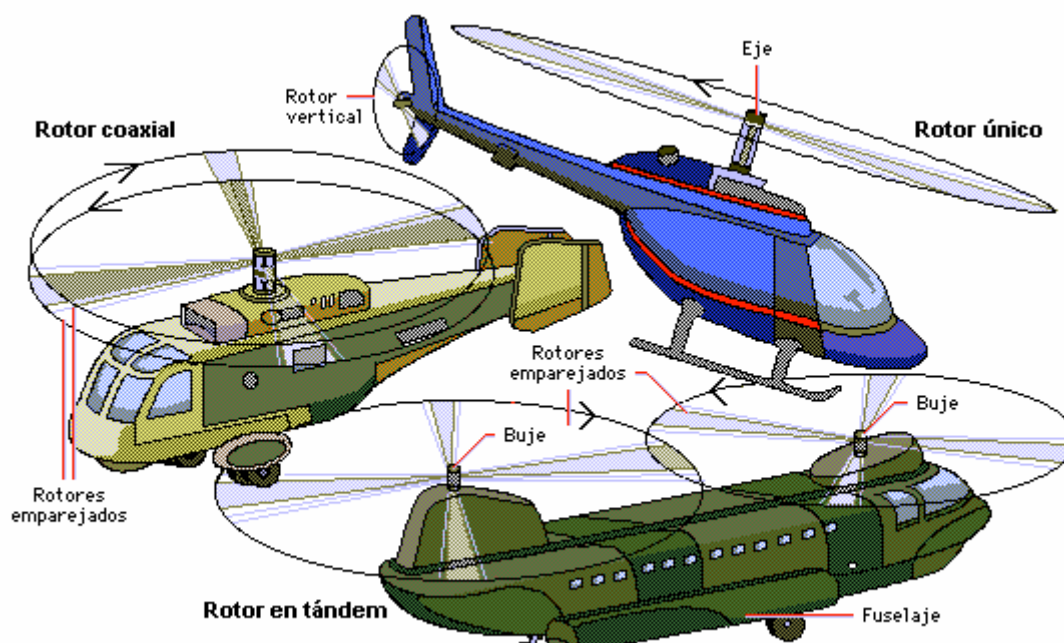


Figura 1.1 – El rotor de un helicóptero



1.2 OBJETIVOS

El objetivo más claro que persigue este proyecto es el análisis de una pala de helicóptero empleando un modelo analítico. Para alcanzar este objetivo global se han definido los siguientes objetivos concretos:

- Obtención de los parámetros característicos de un helicóptero medio mediante aproximaciones obtenidas con datos de helicópteros reales.
- Obtención aplicando la teoría de materiales compuestos de pared delgada de los parámetros característicos de la sección (rigidez y masa específica).
- Resolución del cálculo estático aplicando la teoría de vigas rotatorias y de materiales compuestos de pared delgada.
- Resolución del cálculo dinámico para diseñar la pala para evitar la resonancia en la misma utilizando la teoría de vigas rotatorias.



1.3 DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO

El proyecto está estructurado en ocho capítulos y dos anexos.

En el presente capítulo se expone la motivación que lleva a la realización de este proyecto. También se fijan unos objetivos que se buscan alcanzar así como se hace una breve descripción de la estructura del proyecto.

En el segundo capítulo se realiza una breve descripción del helicóptero, así como se muestra la historia de la evolución de este.

En el tercer capítulo se explica concretamente sobre el rotor, como elemento principal de estudio donde se describe su terminología, los tipos de rotores, los perfiles aerodinámicos y la pala.

En el cuarto capítulo se obtienen los parámetros característicos para un helicóptero de transporte medio utilizando correlaciones obtenidas mediante datos reales de helicópteros y otras aportadas por la bibliografía.

En el quinto capítulo se calculan los parámetros de la sección utilizando la teoría de materiales compuestos de pared delgada.

En el sexto capítulo se presenta el cálculo estático. Se realizan todos los desarrollos teóricos necesarios para la resolución de la ecuación de la elástica, así como la obtención de los esfuerzos y comprobación de la resistencia. Por último se presenta el método de resolución de la ecuación de la elástica.

Con el séptimo capítulo se desarrolla el análisis de vibraciones. Se muestra el desarrollo teórico para la obtención de las formas propias, frecuencias propias, y regímenes de resonancia.

En el octavo capítulo se presentan las conclusiones obtenidas tras la realización del proyecto así como se plantean posibles trabajos futuros y mejoras del diseño de la pala.

Finalmente se muestra la bibliografía consultada para la ejecución de este proyecto. En los dos anexos se encuentra el programa realizado en el entorno Matlab y las principales características de algunos helicópteros comerciales similares al objetivo del diseño de este proyecto.



Capítulo 2

IDEAS GENERALES SOBRE LOS HELICÓPTEROS

2.1 INTRODUCCIÓN

Las aeronaves V/STOL, siglas que significan vertical/Short take-off and Landing, y que se han impuesto en la literatura aeroespacial con preferencia a las ADAV/C correspondientes a la expresión de los idiomas de origen latino, son aeronaves que se diferencian de las convencionales por ser capaces de despegar y aterrizar verticalmente o con un rodaje sobre tierra corto. Ello obliga a la adopción de dispositivos o configuraciones especiales (rotores sustentadores, turbo reactores de sustentación o empuje orientable, elementos hipersustentadores soplados, etc) que confieren a estas naves un aspecto especial y que obliga a un estudio especializado de ellas.

Una aeronave convencional necesita tener una velocidad mínima de traslación respecto al aire para que sus alas puedan proporcionar la sustentación necesaria para equilibrar su peso; durante el despegue necesitan una distancia de sustentación para alcanzar dicha velocidad y en el aterrizaje se necesita una cierta distancia de parada para detener la aeronave desde la velocidad de toma de contacto con el suelo. Sin embargo, una aeronave VTOL no necesita ningún recorrido en tierra, ni en despegue ni en aterrizaje, para la transición entre la condición de reposo y la de vuelo.

Más difícil es precisar la definición de aeronave STOL, debido a que las aeronaves convencionales tienen distancia de aterrizaje y despegue muy diferentes entre ellas, especialmente como función de su tamaño. Atendiendo a su constitución una aeronave STOL sería aquella que incorpora dispositivos especiales que la permiten operar en terrenos de longitud mucho menor que los que necesitaría una aeronave convencional de masa similar.

En la Figura 2.1 se representa de forma esquemática las diferencias esenciales entre las diversas tipos de aeronaves de alas giratorias, según las funciones asignadas a su rotor.

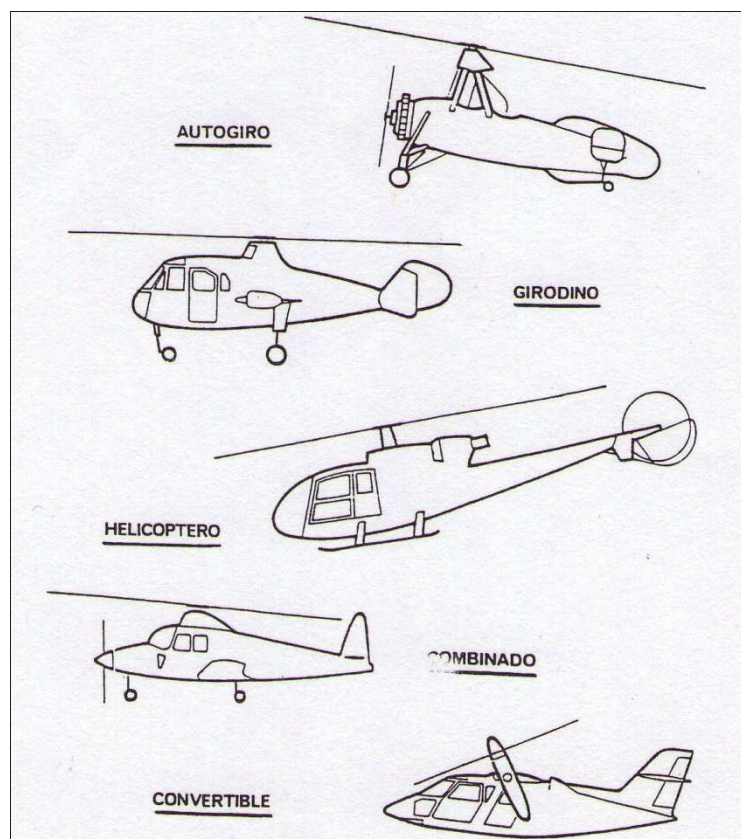


Figura 2.1 – Tipos básicos de aeronaves de alas giratorias

2.2 CLASIFICACIÓN DE LOS HELICOPTEROS

A pesar de los muchos sistemas ensayados para conseguir aeronaves V/STOL el helicóptero es el tipo que ha alcanzado un mayor grado de madurez y difusión existiendo en la actualidad una gama muy diversificada de configuraciones y tamaños para tratar de cumplir las misiones asignadas de la mejor forma posible. Su clasificación puede hacerse atendiendo a diversos aspectos:

Por el **número de rotores sustentadores** pueden ser monorrotores, birrotores con rotores coaxiales, entrelazados, en tándem o lado a lado o multirrotores, con más de dos rotores. La forma más introducida es el monorrotor con un pequeño rotor antipar en cola.

Por el **modo de accionamiento del rotor** pueden ser de arrastre mecánico o eyección de gases en la pala, aunque actualmente todos los helicópteros son del primer tipo.

Por el **tipo de motor** utilizado los hay con motor alternativo, actualmente reservado a los helicópteros más pequeños, y con motor de turbina, con las variantes de turbina libre o turbina unida al conjunto rotatorio del generados de gases.

Por el **número de motores** existen helicópteros monomotores y polimotores, sin que actualmente existan helicópteros con más de tres motores.



En lo referente al **tamaño** la clasificación suele hacerse por la masa máxima permitida al despegue. Las propias normas de certificación (FAR.27 y FAR.29) establecen una diferencia entre helicópteros pequeños, con masa igual o inferior a 6000 lb, y helicóptero de categoría de transporte. Sin embargo, puede establecer una clasificación con más grupos, basada en potencias de 10, tal como la recogida en la tabla 2.1.

Ultraligeros	$M \leq 10^{5/2} = 315 \text{ kg}$
Ligeros	$10^{5/2} < M \leq 10^3 = 1000 \text{ kg}$
Intermedios	$10^3 < M \leq 10^{7/2} = 3150 \text{ kg}$
Medios	$10^{7/2} < M \leq 10^4 = 10000 \text{ kg}$
Pesados	$10^4 < M \leq 10^{9/2} = 31500 \text{ kg}$
Superpesados	$10^{9/2} < M$

Tabla 2.1 – Clasificación de los helicópteros por su masa máxima

La clasificación por la **misión** principal para la que han sido proyectados asigna al helicóptero el adjetivo o gentilicio de la propia misión, aunque es frecuente el caso de helicópteros para misiones múltiples que suelen denominarse utilitarios o polivalentes.

2.3 ELEMENTOS CONSTITUTIVOS DE LOS HELICÓPTEROS

El elemento más distintivo del helicóptero es su rotor o rotores que constituyen el elemento sustentador y de control del mismo. A él debe añadirse el fuselaje como elemento portador de tripulación, carga de pago, grupo motor, combustible e instalaciones varias. Rotores, fuselaje y tren de aterrizaje integran la denominada célula en la que también se consideran incluidos algunas veces los reductores y mandos de vuelo.

A continuación se pasa a detallar los distintos elementos que constituyen un helicóptero:

1. SISTEMA SUSTENTADOR Y DE CONTROL

1.1 Rotor principal

1.1.1 Palas

1.1.2 Cubo

1.1.3 Plato oscilante

1.1.4 Reductor principal



- 1.2 Rotor antipar
 - 1.2.1 Palas
 - 1.2.2 Cubo
 - 1.2.3 Plato de mando colectivo
 - 1.2.4 Transmisión
- 1.3 Mandos de vuelo
 - 1.3.1 Mando de paso colectivo (palanca)
 - 1.3.2 Mando de paso cíclico (palanca)
 - 1.3.3 Mando de paso de rotor antipar (pedales)
 - 1.3.4 Transmisiones y servomandos
- 2. ESTRUCTURA Y TREN DE ATERRIZAJE
 - 2.1 Fuselaje principal
 - 2.2 Soporte del rotor de cola
 - 2.3 Estabilizador horizontal y deriva
 - 2.4 Tren de aterrizaje
 - 2.5 Alas fijas
- 3. GRUPO MOTOR E INSTALACIONES FIJAS
 - 3.1 Grupo motor
 - 3.1.1 Motor
 - 3.1.2 Reductor
 - 3.1.3 Toma de aire
 - 3.1.4 Salida de gases
 - 3.2 Instalaciones de motor
 - 3.2.1 Combustible
 - 3.2.2 Lubricación
 - 3.2.3 Refrigeración



- 4. INSTALACIONES DE TRANSFORMACIÓN Y DISTRIBUCIÓN DE ENERGÍA
 - 4.1 Eléctrica
 - 4.2 Hidráulica
 - 4.3 Presión, neumática o vacío
- 5. INSTALACIONES DE CONTROL DE VUELO, NAVEGACIÓN Y COMUNICACIONES
 - 5.1 Anemométrica y altimétrica
 - 5.2 Aparatos de a bordo
 - 5.3 Equipos de navegación y comunicaciones
- 6. INSTALACIONES DIVERSAS
 - 6.1 Acondicionamiento interior
 - 6.2 Acondicionamientos ambiental
 - 6.3 Antivaho y limpiaparabrisas
 - 6.4 Prevención y eliminación de hielo
 - 6.5 Detección y prevención de incendios
 - 6.6 Oxígeno
 - 6.7 Iluminación (interior y exterior)
 - 6.8 Manejo y remolque de cargas
 - 6.9 Flotadores
 - 6.10 Instalaciones militares



2.4 EVOLUCIÓN DE LOS HELICÓPTEROS

Como en casi todos los inventos humanos es posible encontrar antecedentes de las ideas básicas del helicóptero en la más remota antigüedad. La primera aplicación de las alas giratorias no fue para conseguir sustentación si no para captar la energía del viento y transformarla en par motor de los molinos. La posibilidad técnica de conseguir sustentación por medio de alas giratorias, atornillándose en el aire, procede de Leonardo da Vinci a finales del siglo XV. Posteriormente hubo varios intentos de hacer volar maquetas con alas giratorias, pero hasta principios del siglo XX no fue posible construir un aparato volador con alas giratorias por no disponer de los motores adecuados para accionarlas. Sin embargo los primeros intentos fueron condenados al fracaso ya que las aeronaves construidas no eran controlables, por lo cual eran sólo demostradores de la capacidad de obtener sustentación con alas giratorias.

El primer vuelo con éxito de una aeronave de alas giratorias corresponde al autogiro, del español Juan de la Cierva, en enero de 1923. Este inventor español consiguió evitar la transmisión al vehículo del par de vuelco originado por el rotor, debido a la asimetría de las condiciones aerodinámicas de las palas en el vuelo de avance, mediante la articulación del abatimiento; pero, además, esta articulación, al establecer un desfase de 90° entre la acción aerodinámica y la respuesta del movimiento de las palas, hizo que la respuesta del helicóptero a perturbaciones longitudinales fuera también longitudinal, facilitando grandemente su control.

Pero el autogiro no puede conseguir el vuelo a punto fijo, razón por la cual continuaron las investigaciones e intentos alrededor del helicóptero hasta conseguir el éxito de un aparato voluble y controlable con el modelo de Sikorsky VS-300 en septiembre de 1939. Este helicóptero monorrotor incorporó un pequeño rotor de cola, para equilibrar el par motor aplicado al rotor principal, y para el control direccional.

A partir de este momento el desarrollo de la tecnología fue muy rápido dando origen a una industria para satisfacer las necesidades de un tipo de aeronaves extraordinariamente eficaces en misiones de salvamento y vigilancia.

Un avance muy importante fue la introducción de los motores de turbina en los helicópteros. A pesar de su mayor consumo específico que los alternativos de igual potencia, su menor peso y menor nivel de vibraciones, así como el menor volumen, lo han convertido en el motor ideal para los helicópteros, sobre todo en la configuración de turbina libre, que permite independizar, dentro de ciertos límites, los regímenes del generador de gas y el de la turbina de potencia, ligada al rotor. El helicóptero francés Alouette II, que voló en marzo de 1955, fue el primer helicóptero que incorporó una turbina de gas como grupo motor.

A partir de este momento los trabajos se dirigieron al perfeccionamiento que ha permitido mejorar las condiciones operativas de los helicópteros aumentando su proporción de carga de pago y su velocidad de crucero, y disminuyendo sus costes operativos.

En aerodinámica se han perfeccionado los perfiles de las palas y su forma en planta, sobre todo en punta de pala, para permitir una mayor sustentación con menos resistencia. También se cuida la aerodinámica del fuselaje y se dota al helicóptero de trenes de aterrizaje retráctiles. Se ha ido a rotores de cola carenados (fenestrón) e incluso a su supresión sustituyéndoles por chorros de gas.



En los materiales se incrementa progresivamente la participación de materiales compuestos en componente estructurales, lo que permite aumentar la proporción de carga útil a peso máximo. El empleo de estos materiales en las palas ha extendido notablemente la vida operativa de las mismas reduciendo los costes de sustitución de componentes.

En los cubos de los rotores se han sustituido las articulaciones por elementos flexibles, lo cual reduce el número de piezas y, consecuentemente los costes de producción y mantenimiento. Además permiten diseños aerodinámicamente más limpios, lo que beneficia a la resistencia total del helicóptero.

En los mandos de vuelo se ensayan técnicas de transmisión de señales por cable eléctrico o fibra óptica desde los mandos del piloto hasta los actuadores de los rotores y motores.

La utilización de ordenadores para control del vuelo, pantallas multifuncionales para presentación de la información y la progresiva miniaturización de los equipos de navegación y comunicaciones, con mayor fiabilidad, contribuyen a la reducción de masa en vacío y costes de mantenimiento del helicóptero.

La figura 2.2 es un esquema que recoge los principales aparatos que han marcado hitos en el desarrollo del helicóptero, curiosamente en saltos de 16 años, hasta llegar a la introducción del motor de turbina.

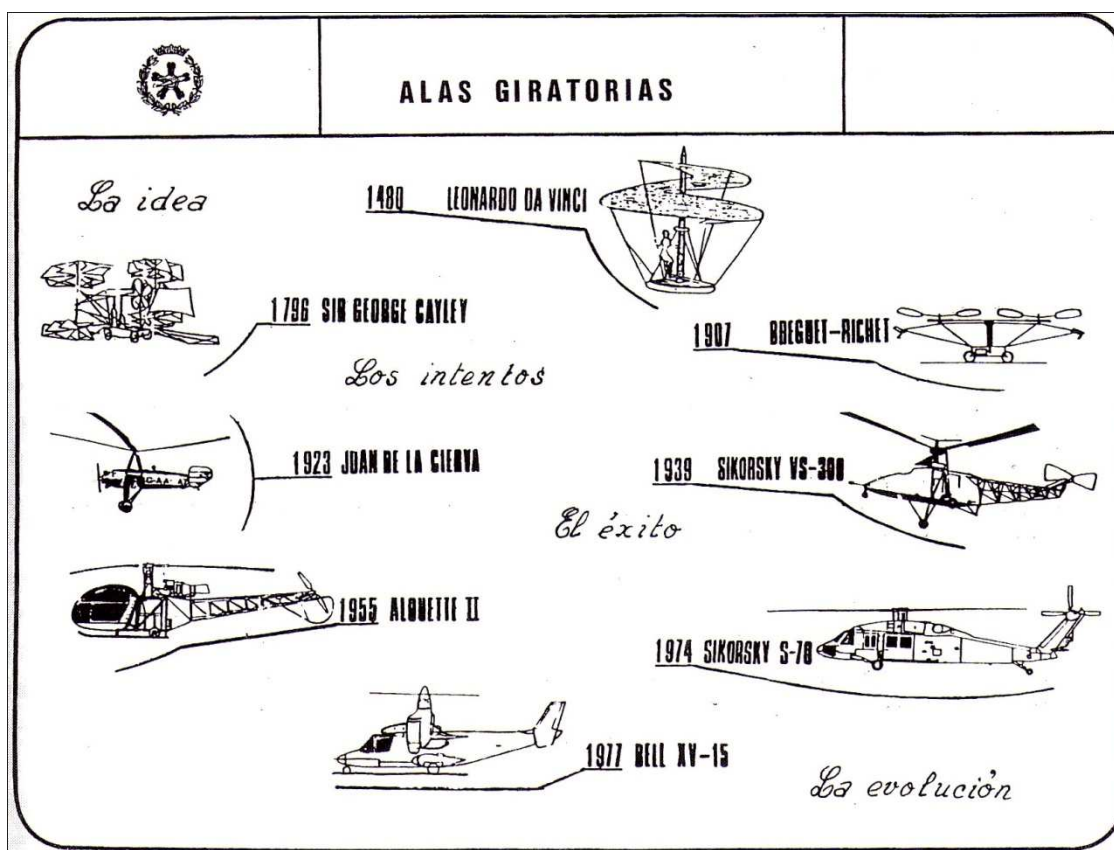


Figura 2.2 – Evolución de las alas giratorias



Sin embargo las aeronaves de alas giratorias tienen una limitación en su velocidad de crucero que procede de la entrada en pérdida por compresibilidad de la pala que avanza, en la que se suman la velocidad de rotación y la velocidad de vuelo, y la entrada en pérdida normal en la pala que retrocede, que debe aumentar su ángulo de ataque para compensar la reducción de sustentación por disminución de su velocidad relativa. Por ello se ha vuelto al concepto de aeronave convertible, cuyos rotores basculan 90° para convertirse en hélices propulsoras durante la fase de vuelo como avión, en la cual la sustentación es proporcionada por alas fijas convencionales, aunque de menor superficie que en un avión normal ya que no se utilizan durante el despegue y el aterrizaje. Por el contrario los rotores resultan algo desproporcionados como hélices propulsoras en vuelo de avance. Bell hizo volar una aeronave de este tipo, el XV-3, en 1955. Posteriormente, en 1959, Hiller puso en vuelo el X-18 en el que basculaba el ala completa con los motores, en 1966 Bell hacía volar el X-22 con cuatro hélices carenadas basculantes, y en 1968 voló el Nord 500 también con hélices carenadas basculantes en puntas de ala. Las dificultades de control durante la transición, en las que el rotor cedía su función sustentadora a las alas fijas para pasar a asumir una función exclusivamente propulsora, impidieron que estas fórmulas alcanzaran un estado operacional.

El desarrollo de los sistemas automáticos de control ha permitido volver a las fórmulas de aeronaves convertibles con periodo de transición y en 1977 coló el Bell XV-15 con motores basculantes, cuyos resultados han servido para el desarrollo del V-22 Osprey, conjuntamente por Bell y Boeing Vertol, respondiendo a las exigencias de los cuatro servicios militares de los Estados Unidos. Se trata de una aeronave convertible de dos grupos motores Allison de 6000 shp basculantes en extremos de ala, previsto para transportar hasta 9000 kg de carga interna, con un alcance máximo de 2100 nmi y velocidades superiores a 275 kts. El primer prototipo voló en marzo de 1989 dentro de un programa de evaluación que prevé 4000 horas de vuelo con 6 prototipos.

La comparación de regiones de vuelo de un helicóptero, un avión con turbohélices y un convertible de motores basculantes se presenta en la figura 2.3 en la que puede verse que el convertible cubre prácticamente ambas regiones pero con una proporción menor de carga de pago.

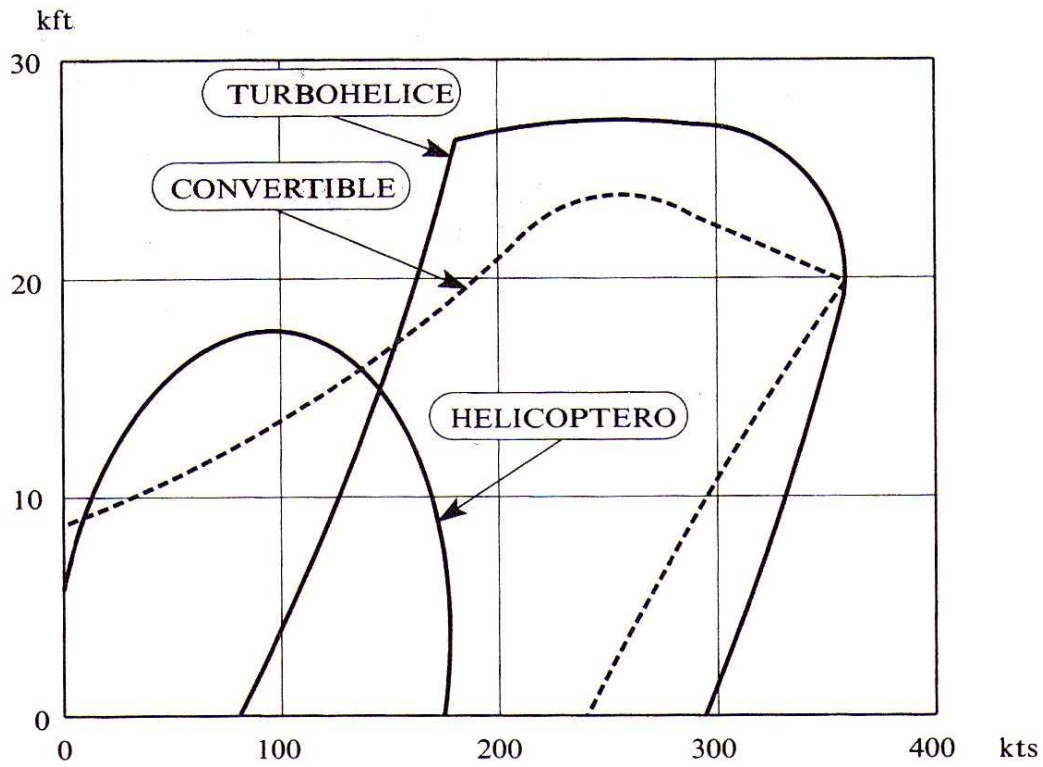


Figura 2.3 – Comparación de regiones de vuelo

Capítulo 3

EL ROTOR

3.1 TERMINOLOGÍA

Los términos comunes usados para describir los sistemas del rotor y sus componentes son mencionados en este capítulo. Aunque existen algunas variaciones en los sistemas entre las diferentes aeronaves, los términos mostrados en este sitio son aceptados por la mayoría de los constructores. En algunos casos se respetan los términos en ingles debido a que son más conocidos en esa forma que su traducción al castellano.

El sistema mostrado en la siguiente figura corresponde a un sistema de rotor totalmente articulado:

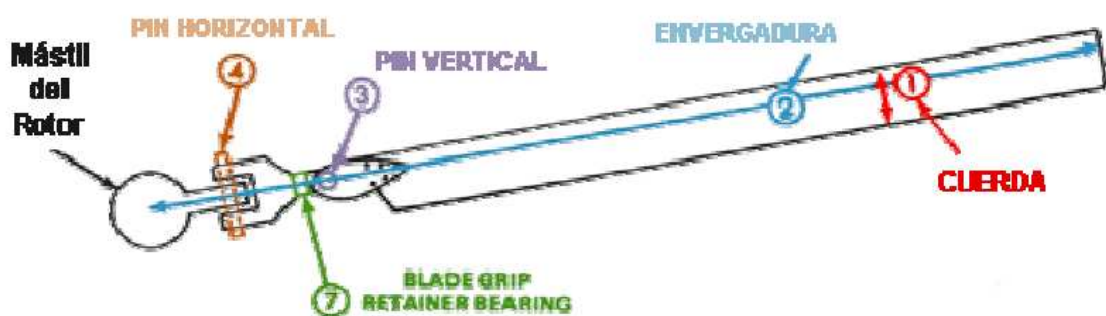


Figura 3.1 – Rotor totalmente articulado

La siguiente figura muestra un rotor semi-rígido, que como se puede notar no tiene un pin horizontal ni un pin vertical. En su lugar, el rotor se balancea por intermedio del cojinete de trunnion que está conectado al mástil del rotor principal.

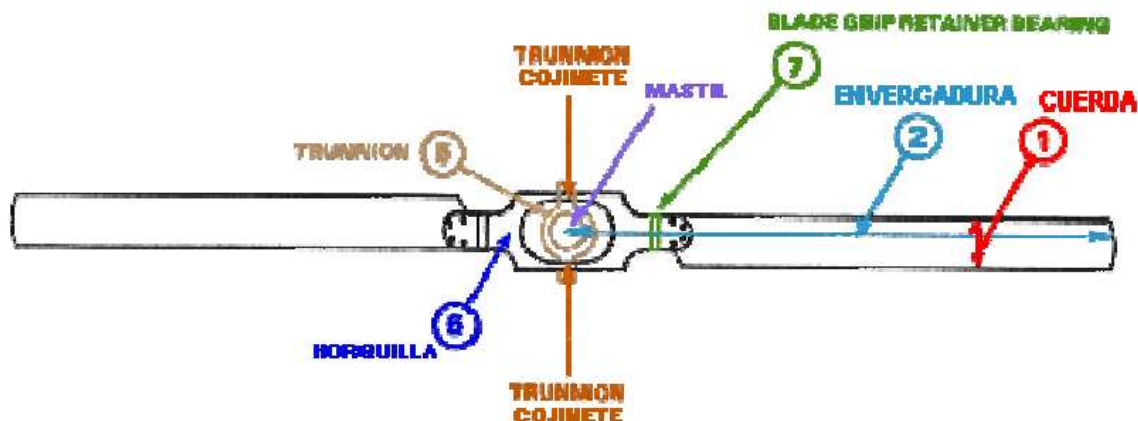


Figura 3.2 – Rotor semirrígido

1.- CUERDA: Es la línea recta que une el borde de ataque con el borde de fuga. Es una dimensión característica del perfil.

2.- ENVERGADURA: Es la distancia de punta a punta del ala (o pala), independientemente de la forma que tenga.

3.- PIN VERTICAL (Vertical hinge pin): Es el eje de pivote que permite el adelantamiento (o retroceso) de la pala independientemente de las demás palas.

4.- PIN HORIZONTAL (Horizontal hinge pin): Es el eje que permite el pivote hacia arriba o hacia abajo de las palas (flapeo), independientemente de las demás palas.

5.- TRUNNION: Es el elemento que permite el "flapeo" de las palas.

6.- HORQUILLA (YOKE): Es el elemento estructural al cual las palas van fijadas y al cual van ligadas al mástil a través del trunnion y al cojinete del trunnion.

7.- BLADE GRIP RETAINER BEARING: Es el cojinete que permite la rotación de las palas sobre su eje longitudinal para permitir el cambio de paso.

8.- Torsión de la Pala (Blade Twist): Es una característica de construcción de las palas para que el ángulo de incidencia en la punta sea menor que en la raíz. Esta torsión de la pala ayuda a mantener la sustentación a lo largo de la misma incrementando el ángulo de incidencia en la raíz donde la velocidad es menor.

3.2 TIPOS DE ROTOR

El sistema del rotor, o más simplemente *rotor*, es la pieza que gira de un helicóptero para generar elevación. Un sistema del rotor se puede montar horizontalmente como son los rotores principales, proporcionando la elevación verticalmente, o puede ser montado verticalmente, por ejemplo un rotor de la cola, para proporcionar la elevación horizontalmente según lo empujado para contrariar efecto del esfuerzo de torsión. En el caso de tiltrotors, el rotor se monta en una barquilla que rote en el borde del ala a la transición el rotor de una posición montada horizontal, proporcionando la elevación horizontalmente según lo empujado, a una posición montada vertical que proporciona la elevación exactamente como helicóptero.

El rotor consiste en las láminas de un mástil, del cubo y de rotor. *Mástil* es un eje cilíndrico del metal que extiende hacia arriba de y es conducido por la transmisión. En la tapa del mástil está el punto de accesorio para las láminas de rotor llamadas *cubo*. Las láminas de rotor entonces son unidas al cubo por un número de diversos métodos. Los sistemas principales del rotor se clasifican según cómo las láminas de rotor principales se unen y se mueven concernientes al cubo principal del rotor. Hay tres clasificaciones básicas: semirrígido, rígido, o articulado completamente, aunque algunos sistemas modernos del rotor utilizan una combinación dirigida de estos tipos.

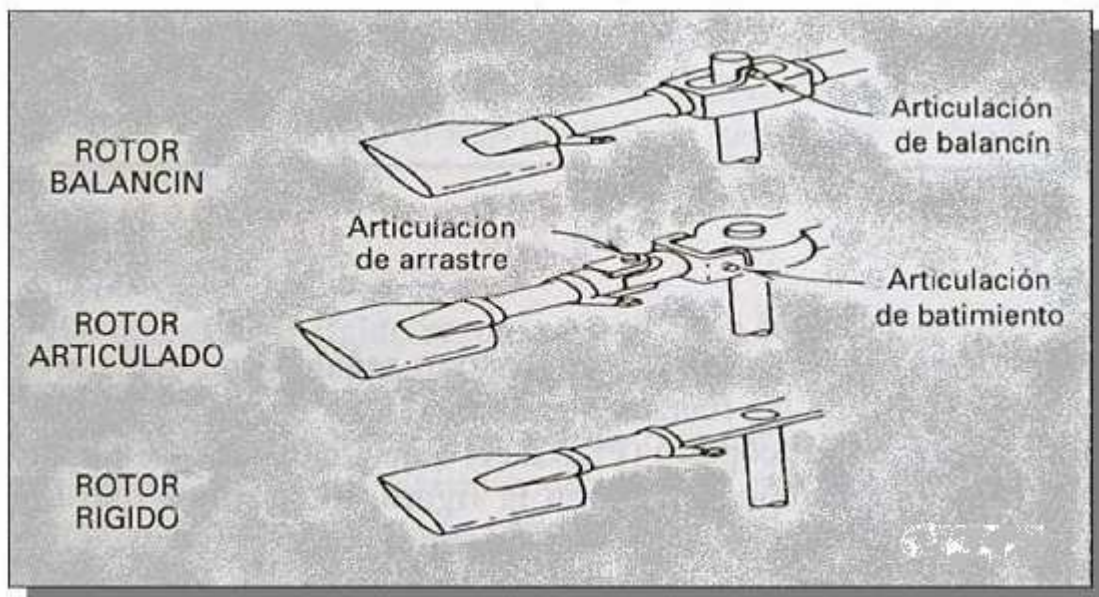


Figura 3.3 – Tipos de rotor

Semirrígido

Un sistema semirrígido del rotor permite dos diversos movimientos, aletear y emplumar. Este sistema se abarca normalmente de dos láminas, que se unen rígidos al cubo del rotor. El cubo después es unido al mástil del rotor por un cojinete del muñón o una bisagra el vacilar y está libre inclinar con respecto al eje de rotor principal. Esto permite las láminas al balancín o a la aleta juntas. Como aletas de una lámina abajo, las otras aletas para arriba. El cambio de paso es logrado por la bisagra del cambio de paso, que cambia el ángulo de la echada de la lámina. Puesto que no hay bisagra de fricción vertical, conducir-se retrasan las fuerzas se absorben con la flexión de la lámina.

Los helicópteros con los rotores semirrígidos son vulnerables a una condición conocida como topar del mástil que pueda hacer las paradas de la aleta del rotor esquilar el mástil. El topar del mástil se encuentra normalmente durante maniobras bajas-G, así que se escribe en el manual del operador para evitar cualquier condición baja-G.

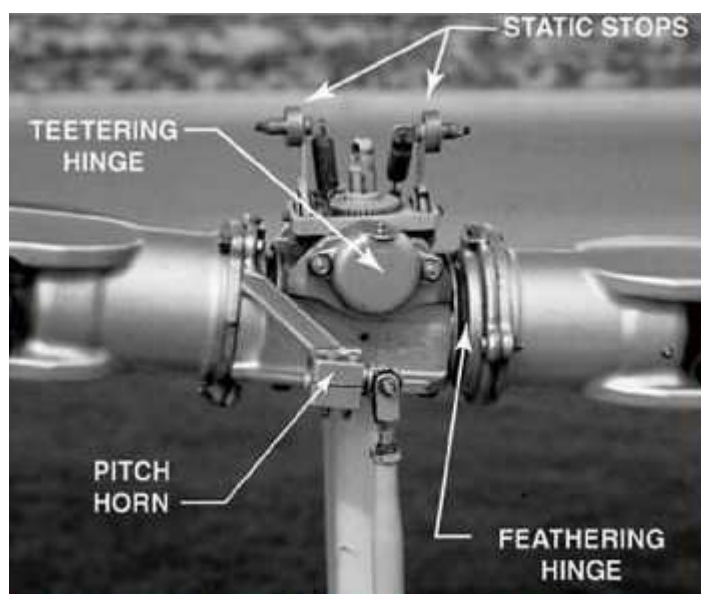


Figura 3.4 – Rotor semirrígido

Articulado completamente

En un sistema completamente articulado del rotor, cada lámina de rotor se une al cubo del rotor con una serie de bisagras, que permiten que la lámina se mueva independientemente de las otras. Estos sistemas del rotor tienen generalmente tres o más láminas. Las láminas se permiten aletear, emplumar, y conducir o retrasarse independientemente. La bisagra horizontal, llamada la bisagra de aleteo, permite que la lámina se mueva hacia arriba y hacia abajo. Se llama aleteo y se diseña este movimiento

para compensar disimetría de la elevación. La bisagra de aleteo se puede situar en las distancias que varían del cubo del rotor, y puede haber más de una bisagra. La bisagra vertical, llamada conducir-se retrasa o la bisagra de fricción, permite que la lámina se mueva hacia adelante y hacia atrás. Se llama este movimiento conducir, se retrasa, fricción, o caza. Los apagadores se utilizan generalmente para prevenir el movimiento hacia adelante y hacia atrás del exceso alrededor de la bisagra de fricción. El propósito de la bisagra y de los apagadores de fricción es compensar la aceleración y la desaceleración causadas cerca del Efecto de Coriolis. Cada lámina se puede también emplumar, es decir, rotar alrededor de su eje a lo largo de la envergadura. Emplumar la lámina significa cambiar el ángulo de la echada de la lámina. Cambiando el ángulo de la echada de las láminas usted puede controlar el empuje y la dirección del disco de rotor principal.

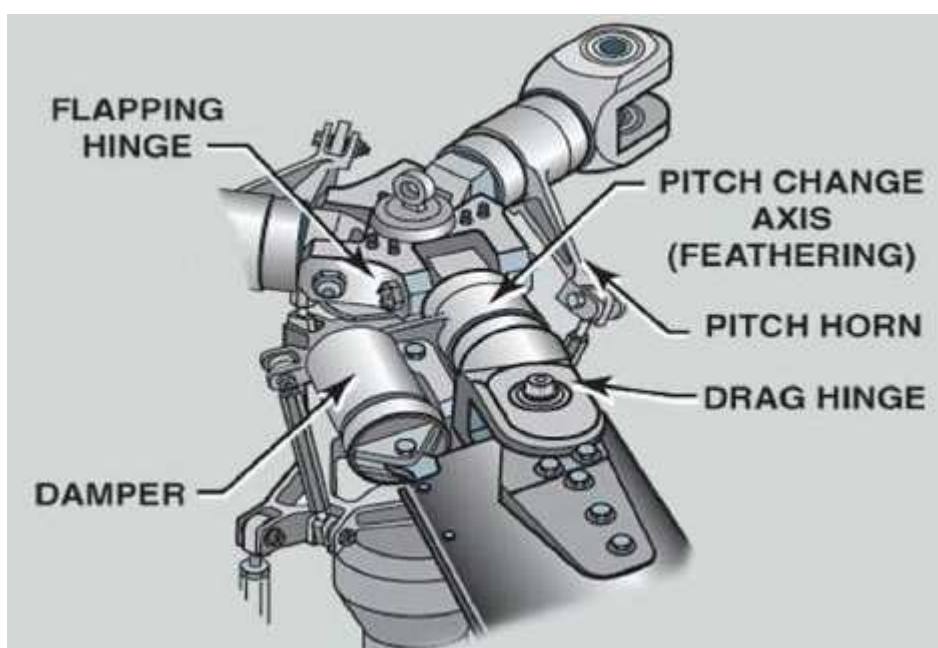


Figura 3.5 – Rotor completamente articulado

Rígido

En un sistema rígido del rotor, las láminas, el cubo, y el mástil son rígidos con respecto a uno. El sistema rígido del rotor es mecánicamente más simple que el sistema completamente articulado del rotor. No hay bisagras verticales u horizontales así que las láminas no pueden aletear o arrastrar, sino que pueden ser emplumadas. Las fuerzas del retraso deben ser absorbidos doblándose más bien que a través de las bisagras. Doblando, las láminas ellos mismos compensan las fuerzas que requirieron previamente las bisagras rugosas. El resultado es un sistema del rotor que tiene menos retraso en la respuesta del control, porque el rotor tiene mucho menos oscilación. El sistema rígido del rotor también niega el peligro del mástil que topa inherente en rotores semirrígidos.

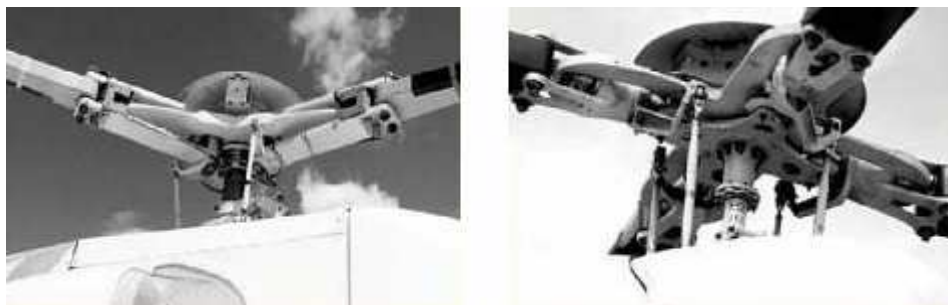


Figura 3.6 – Rotor rígido

Combinación

Los sistemas modernos del rotor pueden utilizar los principios combinados de los sistemas del rotor mencionados arriba. Algunos cubos del rotor incorporan un cubo flexible, que permite la lámina que se dobla (el doblar) sin la necesidad de cojinetes o de bisagras. Estos sistemas, llamados “flextures”. Se construyen generalmente del material compuesto. Los cojinetes Elastomeric se pueden también utilizar en lugar de los cojinetes de rodillo convencionales. Los cojinetes Elastomeric son cojinetes contruidos de un tipo de goma material y han limitado el movimiento que se satisface perfectamente para los usos del helicóptero. Flextures y los cojinetes elastomeric no requieren ninguna lubricación y, por lo tanto, requieren menos mantenimiento. También absorben la vibración, que significa menos fatiga y vida de servicio más larga para los componentes del helicóptero.

3.3 PERFILES

Un helicóptero vuela por los mismos principios que un avión, pero en el caso de los helicópteros la sustentación se logra por la rotación de las palas. Las palas son la estructura que hacen que la sustentación sea posible. Su forma produce sustentación cuando el aire pasa a través de ellas. Las palas del rotor tienen perfiles diseñados específicamente para las características del vuelo. Usualmente los diseñadores tienen un compromiso entre el mejor diseño para un perfil para lograr mejores características de vuelo y para las performances del helicóptero que se piensa construir.

Los perfiles se pueden dividir en dos grandes tipos: SIMÉTRICOS Y ASIMÉTRICOS. Los perfiles simétricos tienen idénticas superficies tanto en la parte superior (extradós) como en la inferior (intradós). Estos satisfacen normalmente los requerimientos de un helicóptero debido a que su Centro de Presión no varía. La

variación permanece casi inalterable bajo los diferentes ángulos de ataque, ofreciendo la mejor relación sustentación/resistencia para las diferentes velocidades de la raíz y de la punta de pala. Sin embargo un perfil simétrico produce menos sustentación que uno asimétrico, teniendo también no deseables características de pérdida. Por otra parte las palas del rotor deben adaptarse a un ancho rango de velocidades desde la raíz hasta la punta, siendo el perfil simétrico perfectamente adaptable a estas condiciones, además de tener un bajo costo y fácil construcción con respecto al perfil asimétrico. Los perfiles asimétricos tienen una gran variedad de diseños, siendo usados por ejemplo en algunos helicópteros como el CH-47 ó el OH-58, y están siendo utilizados en otros nuevos proyectos. Las ventajas de estos perfiles, en contrapartida de los simétricos, es su mayor capacidad de generar sustentación y mejores prestaciones ante la entrada en pérdida. Anteriormente no eran utilizados debido al movimiento de su centro de presión, pero debido a los nuevos materiales de construcción de palas son tenidos cada vez más en cuenta.

3.3.1 Terminología del perfil

En la siguiente figura se encuentran los términos utilizados en un perfil.



Figura 3.7 – Terminología del perfil

- 1.- LINEA DE LA CUERDA: Es la línea recta que pasa por el borde de ataque y por el borde de fuga.
- 2.- CUERDA: Es la línea recta que une el borde de ataque con el borde de fuga. Es una dimensión característica del perfil.



3.- Línea de Curvatura Media: Línea equidistante entre el extradós y el intradós. Esta línea "fija" la curvatura del perfil. Si la línea de curvatura media "cae" sobre la cuerda (como en la figura) se dice que la curvatura es positiva, si cae por debajo, negativa, y si va por debajo y por arriba, doble curvatura.

4.- ORDENADA MÁXIMA: Es la máxima distancia entre la línea de curvatura media y la cuerda del perfil. El valor suele darse en % de la cuerda.

5.- ESPESOR MÁXIMO Y POSICIÓN: Son dos características importantes, que se expresan en % de la cuerda. El valor varía desde un 3 % en los perfiles delgados hasta un 18 % en los más gruesos.

6.- Radio de Curvatura del Borde de Ataque: Define la forma del borde de ataque y es el radio de un círculo tangente al extradós e intradós, y con su centro situado en la línea tangente en el origen de la línea de curvatura media

3.3.2 Elección del perfil

Al seleccionar perfiles aerodinámicos para las palas de un rotor se intenta conseguir la tracción deseada con un mínimo de potencia. La minimización de la potencia inducida conduce a formas en planta y leyes de torsión que produzcan velocidad inducida constante a lo largo de la envergadura de las palas.

La elección del perfil está determinada por los requerimientos operacionales del helicóptero. Las condiciones de operación del perfil dependen en gran medida de la configuración de vuelo, de forma que es imposible definir un perfil óptimo sin que exista un enfrentamiento entre los requisitos más conflictivos.

En la práctica, depende de la sección a lo largo de la envergadura de la pala. El objetivo es compaginar las características de la pala que avanza (alto valor de match de divergencia de resistencia, para valores pequeños de $C_{i_}$) con las características de la pala que retrocede (alto valor de Cl_{max} , para bajo match). También se deberá mantener un buen rendimiento aerodinámico L/D a los valores intermedios de Cl y match en la pala que avanza y retrocede en vuelo vertical. Además, interesará un coeficiente de momento reducido (C_m del orden de 0,01 para minimizar la torsión de la pala y los esfuerzos en los controles de variación del paso).

Inicialmente se utilizaron perfiles convencionales, muy conocidos por su uso en aviación, como el NACA 0012 o el NACA 23012; fue hasta la década de los 70. Posteriormente los fabricantes así como los principales centros de investigación, comenzaron a desarrollar sus propias familias de perfiles adecuadas a las nuevas exigencias y adaptadas a las condiciones particulares de funcionamiento de los vehículos de alas giratorias. Este desarrollo permite, además de los condicionantes arriba señalados, diseñar perfiles con el objetivo de reducir la resistencia y por lo tanto la potencia necesaria del helicóptero.



3.3.3 Nomenclatura NACA

En los EE.UU., el NACA, National Advisory Committee for Aeronautics (actualmente NASA), ha llevado a cabo una investigación sistemática de diferentes tipos de perfiles, que se conocen con el nombre de perfiles NACA, seguido de una serie de números, que determinan su construcción (existen otros estudios sobre perfiles que dieron lugar a otros tipos de nomenclatura, con son el Clark Y, Gótingen y RAF).

Las cifras que van detrás del sobrenombre NACA indican, por su cantidad (cuatro o cinco cifras) y por su valor, los datos necesarios para poder determinar o construir el perfil completamente, dibujando primero la línea de curvatura media, y distribuyendo después sobre ella el espesor correspondiente a un perfil simétrico, esto es, dan una ley de curvatura y distribución del espesor.

Serie NACA de cuatro cifras

Ejemplo: NACA 4412

1ª cifra (4): Expresa la ordenada máxima de la línea de curvatura media en % de la cuerda: 4%

2ª cifra (4): Expresa la posición de dicha ordenada máxima en décimas de la cuerda. En el 40%

3ª y 4ª cifras (12): Expresa el espesor máximo del perfil en % de la cuerda: 12%

Serie NACA de cinco cifras

Se pondrá como ejemplo el NACA 23012, perfil que ha sido profusamente utilizado.

1ª cifra (2): Expresa, aproximadamente, el valor de la ordenada máxima de la línea de curvatura media: 2%

2ª y 3ª cifras (30): Designa el doble de la posición de dicha ordenada: 15%

4ª y 5ª cifras (12): Espesor máximo en %: 12%.

3.4 LA PALA

3.4.1 El número de palas

La pala es el elemento del helicóptero que proporciona la sustentación del mismo. Determinar el número óptimo de palas de rotor es difícil. Las decisiones pueden estar afectadas por los puntos de vista de los fabricantes y por los derechos de patente. Una ventaja de aumentar las palas es que se puede reducir la longitud y peso de cada pala. Además, aumentar el número de palas proporciona un vuelo más suave debido a que disminuye la magnitud de la vibración provocada por la flexión de la pala durante la rotación del rotor. La figura 3.8 muestra diversas disposiciones de las palas del rotor.

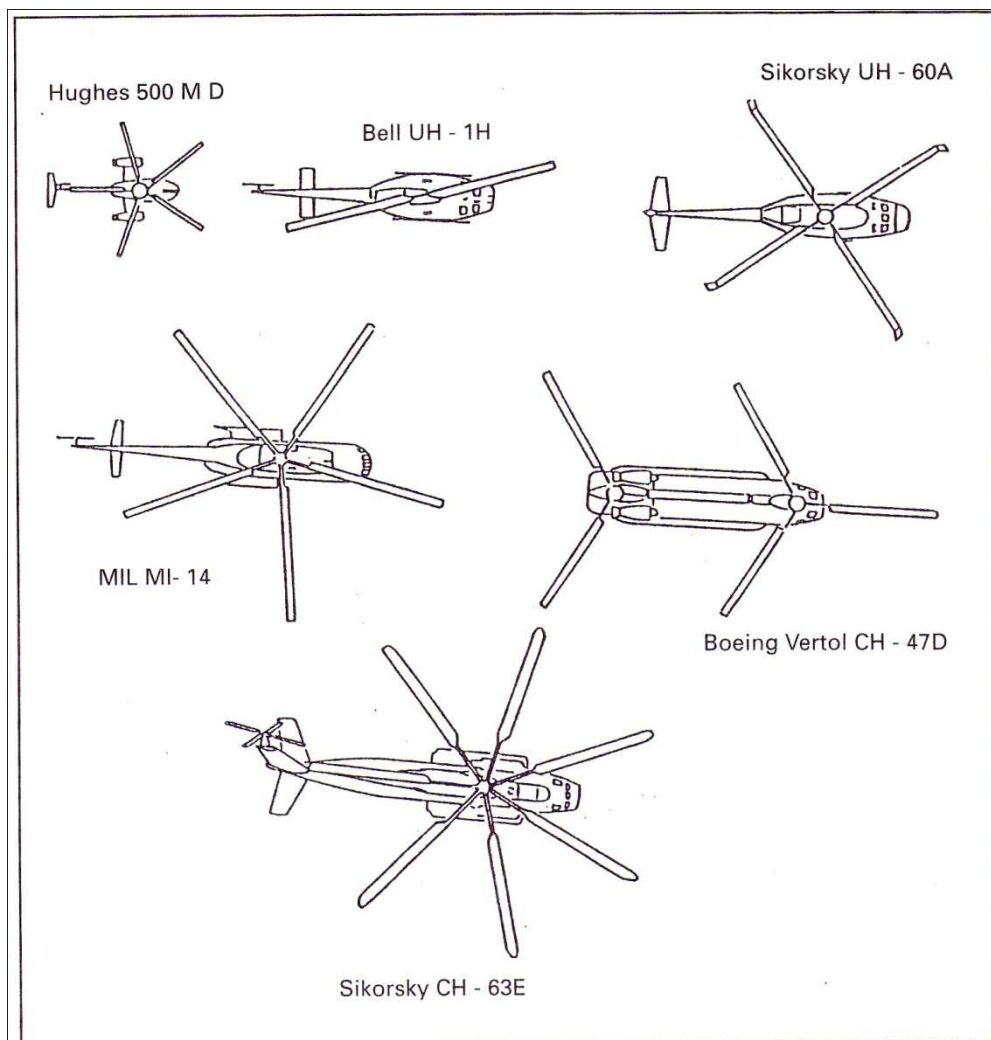


Figura 3.8 – Disposiciones de las palas del rotor

La sustentación de un rotor de helicóptero no puede ser modificada cambiando las revoluciones del rotor. Esto llevaría mucho tiempo y causaría una respuesta al mando inaceptablemente lenta. Aún más, para obtener un empuje para volar en direcciones horizontales debería ser posible inclinar el plano del rotor en cualquier dirección deseada.

La sustentación se cambia variando conjuntamente todos los ángulos de paso de las palas, y se obtiene la inclinación del plano del rotor por medio del control cíclico del Ángulo de paso de la pala, ver figura 3.9

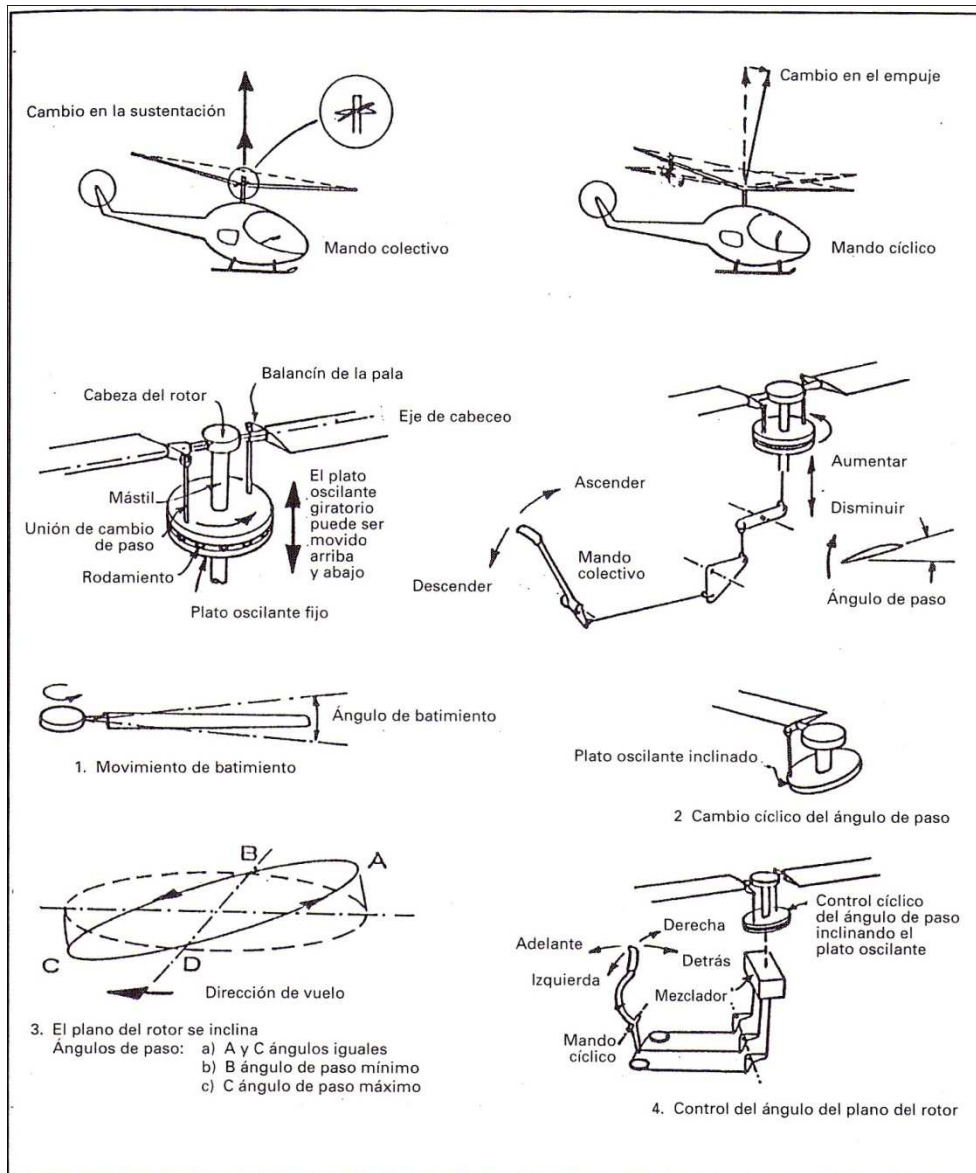


Figura 3.9 – Control de la sustentación y del empuje del rotor

Los ángulos de paso se cambian por medio de articulaciones de cambio de paso unidas a los balancines de los encastres de las palas del rotor y a un plato oscilante giratorio en su extremo inferior. El plato oscilante giratorio se apoya en un plato fijo que puede moverse hacia arriba o hacia abajo para cambiar los ángulos de paso de

manera conjunta, o inclinando para mover las articulaciones hacia arriba o hacia abajo a lo largo de la rotación. De este modo, las alas batien hacia arriba o hacia abajo debido al cambio de sus ángulos de ataque.

3.4.2 Composición tecnológica de la pala

Un rotor principal esencialmente está constituido por un conjunto de palas unidad mediante la cabeza del mismo. Las palas en rotación generan la sustentación y la tracción necesaria para el vuelo del helicóptero.

Básicamente, las solicitaciones a las que se ven sometidas las palas serán: fuerza centrífuga, fuerzas aerodinámicas (por ser una superficie sustentadora en movimiento), fuerzas de inercia (debidas al movimiento de la pala según los ejes de batimiento, arrastre, etc.) y la fuerza gravitatoria. La actuación combinada de todas estas fuerzas generan unos esfuerzos y momentos a lo largo de las palas.

Básicamente todas las palas constarán de un larguero, un recubrimiento de pequeño espesor, un corazón o relleno de las mismas y la punta de la pala. Existen desarrollos tanto en materiales metálicos como en materiales compuestos.

3.4.3 Palas de helicópteros en uso

En este apartado simplemente se muestran algunos ejemplos de los diseños elegidos por diversos fabricantes.

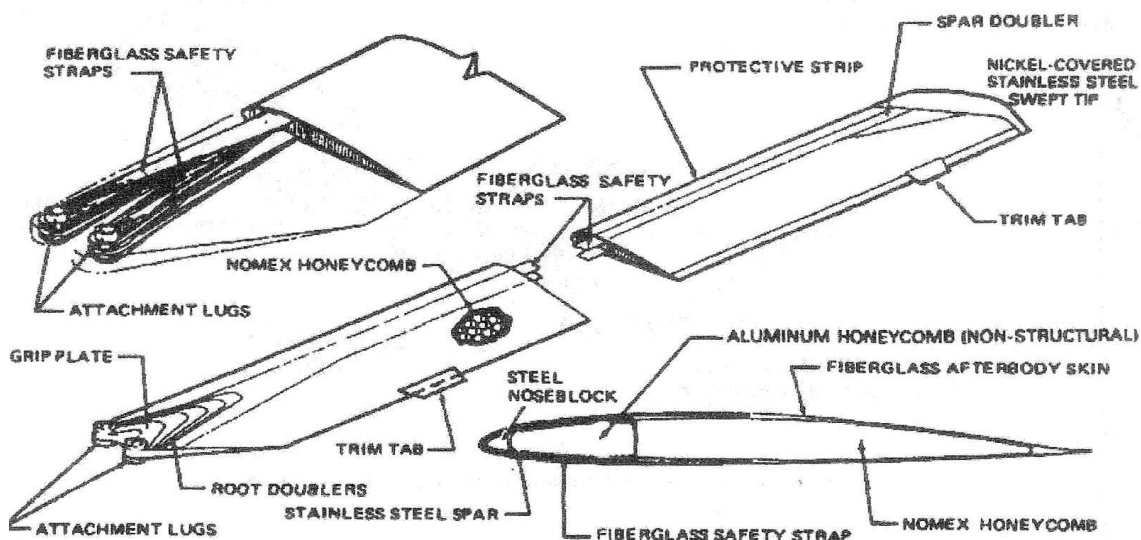


Figura 3.10 – Pala Bell 230 (L.G. Rozas, 2005)

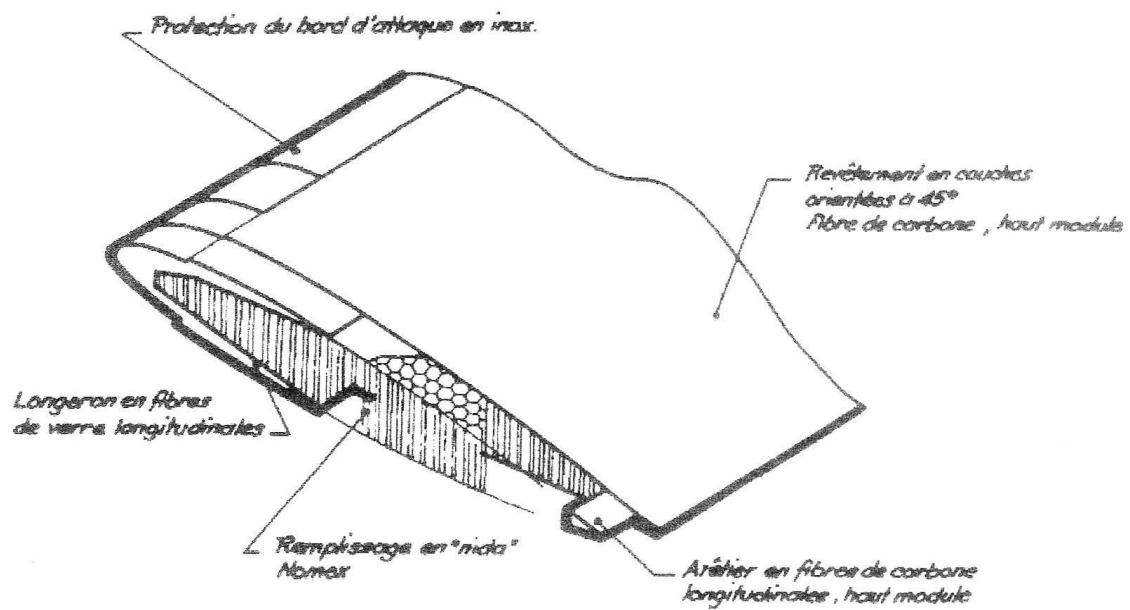


Figura 3.11 – Ejemplo de pala de materiales compuestos. (L.G. Rozas, 2005)

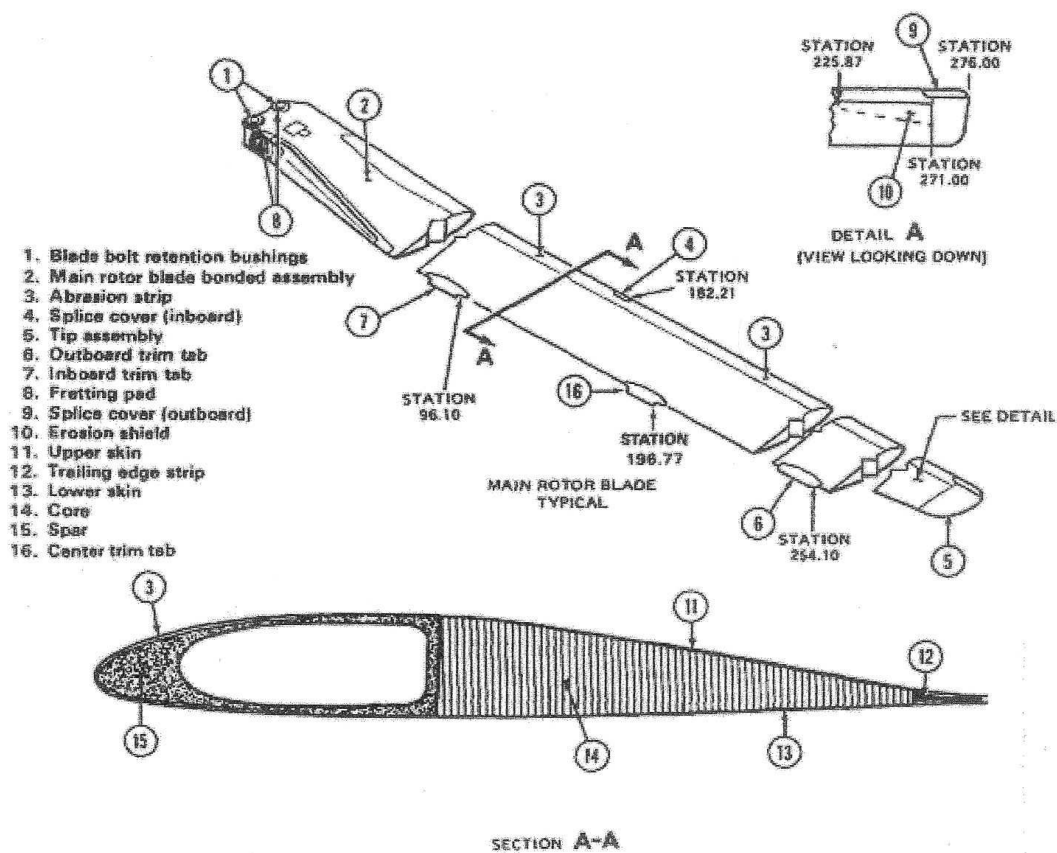


Figura 3.12 – Pala Bell 412 (L.G. Rozas, 2005)

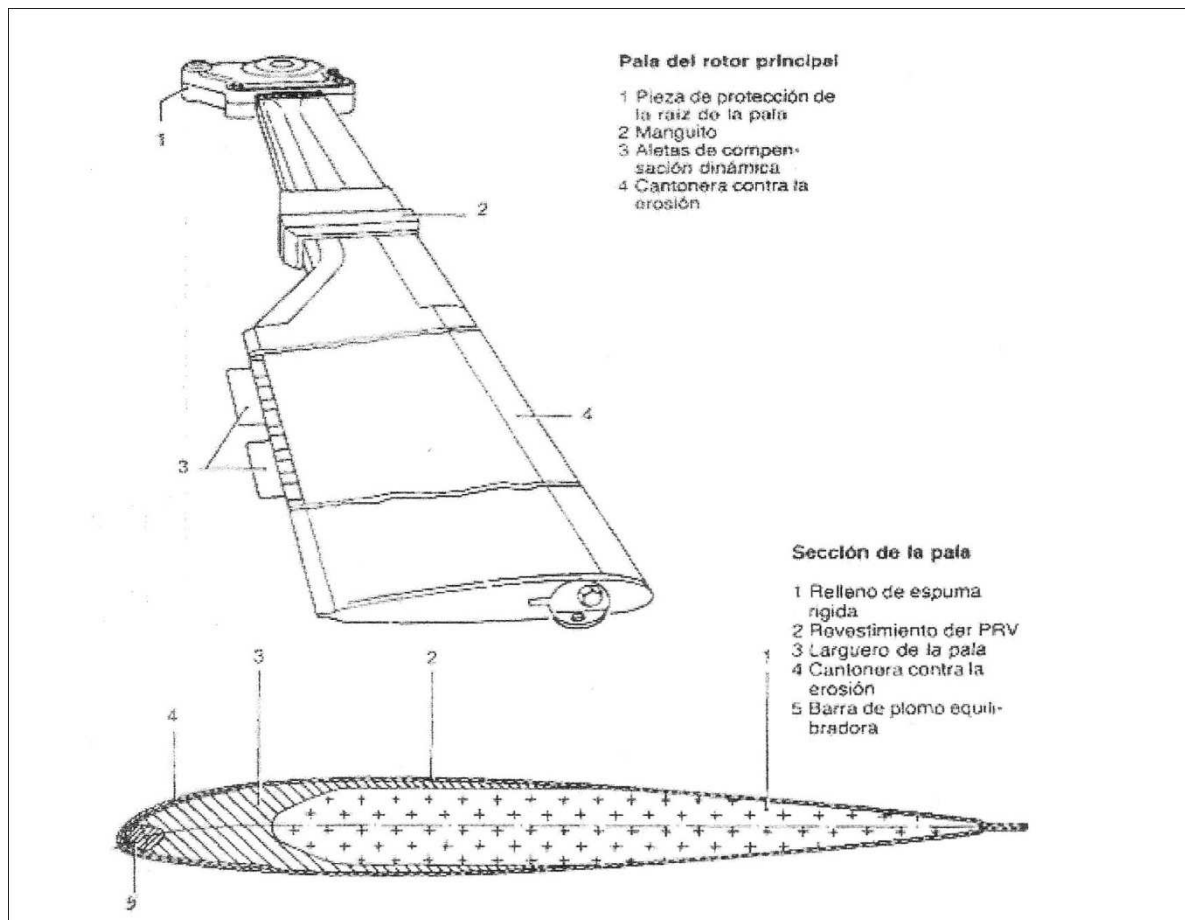


Figura 3.13 – Pala BO 105 (L.G. Rozas, 2005)

3.5 DISEÑO DEL HELICÓPTERO

Las aeronaves pueden ser fabricadas de modos muy diferentes. Cada diseño conlleva compromisos y ninguno de ellos es mejor en todos los aspectos. A continuación se presentan algunos de los problemas básicos del diseño de los helicópteros.

3.5.1 El problema del par principal

Cuando un motor situado en el fuselaje de un helicóptero mueve un rotor, se crea un momento que hace girar al fuselaje en sentido opuesto al rotor. Se han intentado evitar estos efectos impulsando al rotor con turborreactores, estatorreactores o motores colocados en los extremos del rotor. Utilizar un rotor de cola para equilibrar el momento, como se muestra en la figura 3.14, proporciona un diseño sencillo para el rotor principal. Sin embargo, parte de la potencia del motor se debe usar para hacer girar al rotor de cola, sin ser aprovechada en crear sustentación o empuje.

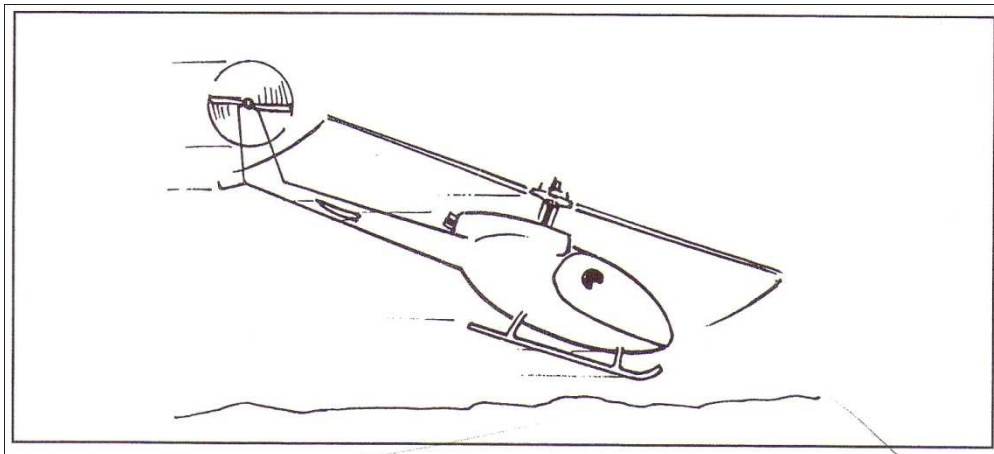


Figura 3.14 – Diseño con rotor único

El deseo de eliminar el rotor de cola ha hecho nacer muchos diseños de rotores dobles, como los rotores coaxiales y de rotores en tándem que se muestran en la figura 3.15. En estos diseños, los rotores giran en sentidos opuestos, con lo que los pares de los rotores se compensan entre sí.

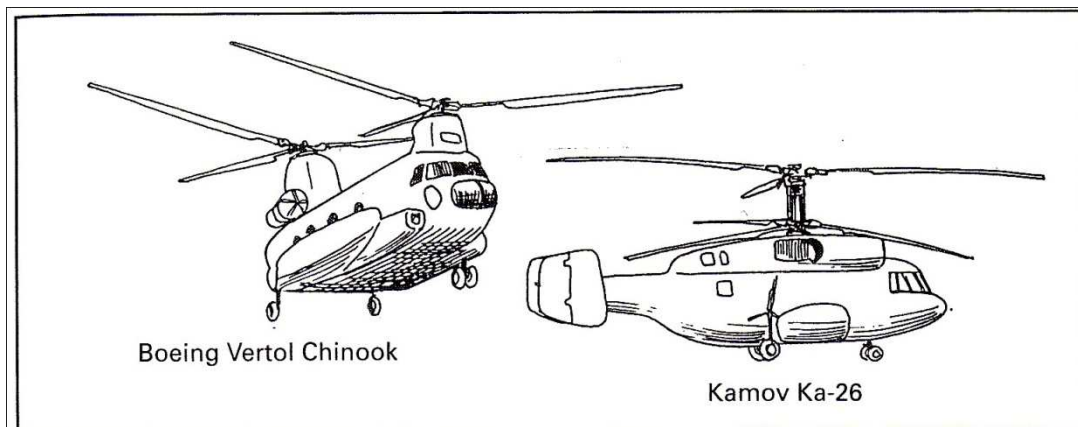


Figura 3.15 – Diseño de helicópteros con dos rotores

3.5.2 El problema de la alta velocidad

La entrada en pérdida de la pala que retrocede y el flujo supersónico en la que avanza son dos de los factores más importantes que limitan las velocidades máximas de los helicópteros, figura 3.16. La combinación de la velocidad de avance y la velocidad de rotación disminuye la velocidad del aire sobre la pala que retrocede y la aumenta en la que avanza.

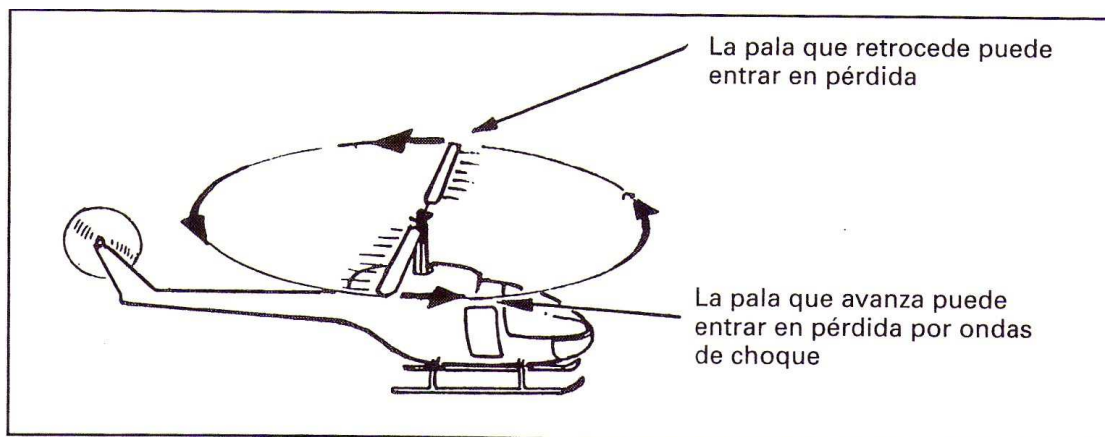


Figura 3.16 – Pérdida de sustentación del rotor a alta velocidad

Para mantener igual la sustentación en ambos lados, se hace necesario disminuir los ángulos de paso de las palas que avanzan y aumentar los ángulos de las que retroceden. Finalmente, se alcanza una velocidad de avance en la cual el Angulo de ataque de la pala que retrocede llega a ser tan grande que el aire empieza a separarse en una estación de pala crítica. Aumentos posteriores de la velocidad harán que la pérdida se propague por la pala. La pérdida de sustentación resultante en la pala que retrocede puede hacer que haya una pala de rotor batiendo de manera incontrolable.

Si se intenta retrasar la entrada en pérdida de la pala que retrocede aumentando la velocidad de rotación del rotor, reduciendo de este modo el Angulo de ataque de la pala que retrocede, aparece un nuevo problema. La sección de la punta de la pala que avanza alcanza velocidades transónicas/supersónicas. Se forman ondas de choque en las palas y esto produce separaciones de la corriente del aire, vibraciones y pérdida de sustentación incluso a bajos ángulos de ataque de la pala. Los efectos de las velocidades transónicas pueden reducirse doblando las puntas de las palas hacia atrás, figura 3.17, o bien disminuyendo el espesor relativo de los perfiles de la pala utilizando una “punta de pala en forma de raqueta”.

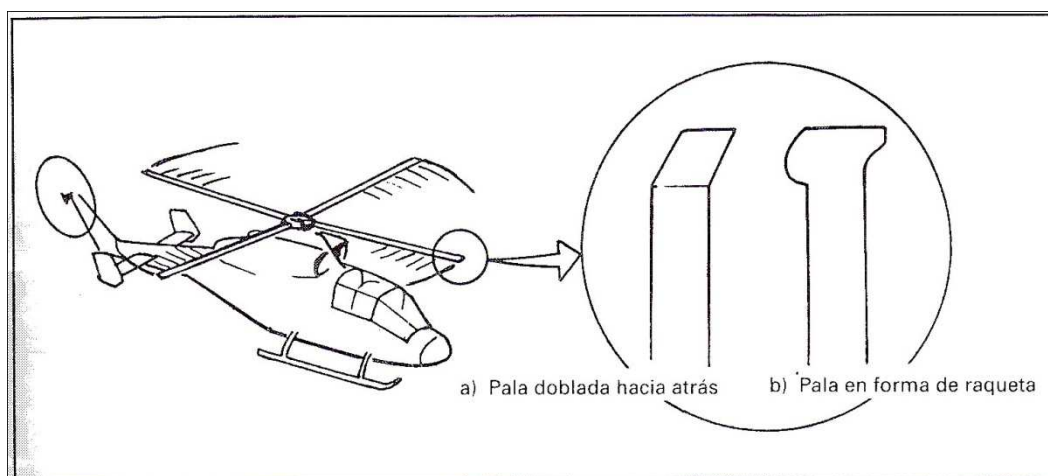


Figura 3.17 – Palas de alta velocidad

PARÁMETROS DE DISEÑO

4.1 INTRODUCCIÓN

El objetivo de este capítulo es dimensionar los distintos parámetros que configuran las palas del helicóptero. En primera instancia, se seleccionarán unos datos de partida y a continuación, se obtendrá el resto de características a partir de estos primeros hasta definir por completo los parámetros de diseño.

Lo primero de todo es elegir ciertos datos de partida que conformarán algunas de las características del helicóptero. Se comienza tomando el máximo peso al despegue (MTOW, maximum take off weight). Ésta es una de las magnitudes más relevantes ya que define el tipo de helicóptero que se va a estudiar. Para el diseño del sistema sustentador se ha escogido un helicóptero medio, es decir, un helicóptero cuyo MTOW está comprendido entre 3150 Kg y 10000 Kg. Además, se pretende escoger un helicóptero que pueda transportar entre 16 y 18 pasajeros, por lo que finalmente, se fija en 7500 Kg el máximo peso al despegue.

El tipo de rotor de este helicóptero será monorrotor y respecto a su unión al cubo se ha optado por realizar el estudio sobre un rotor de palas articuladas, debido a que su utilización es mayor frente a las palas empotradas. Además, dicha articulación presentará una excentricidad respecto al eje de rotación de valor e , que posteriormente será fijada.

Por otra parte, el tipo de sección que utilizan las palas de los helicópteros son tipo sándwich o tipo cajón. Los elementos tipo sándwich están formadas por pieles de materiales compuestos laminados con un núcleo de espuma. Las secciones tipo cajón están compuestas por cuatro paredes fabricadas de materiales compuestos laminados, donde dos paredes están dispuestas de manera horizontal y las otras dos de manera vertical, siendo la sección transversal del conjunto un rectángulo. El objetivo que persigue este proyecto es el cálculo de elementos de materiales compuestos laminados de pared delgada, por lo que la sección que se tomará en el presente análisis será tipo cajón.



Reseñar que en el estudio en cuestión, en una primera parte, atenderá a palas de sección constante en las que la distribución de masa y rigidez es constante a lo largo de la envergadura de la pala. Sin embargo, en un análisis más exhaustivo se realizará un cálculo en el que la cuerda y el espesor de la pala disminuirán según nos alejamos del centro de rotación ajustando estos valores a los que marque su resistencia mecánica. De esta manera, se conseguirá una distribución de masa y rigidez variable a lo largo de la envergadura de la pala y una disminución del peso de éstas.

A partir de todos estos datos de partida se pueden obtener el resto de parámetros de diseños. Para ello, se utilizarán una serie de fórmulas semiempíricas que proporcionan distintos autores para el cálculo de los mismos y una secuencia de correlaciones obtenidas a partir de las características de helicópteros comerciales. Este procedimiento se explica con detenimiento en la siguiente sección.

4.2 DETERMINACIÓN DE PARÁMETROS

Para determinar los valores de los parámetros de diseño que faltan para completar en su totalidad las características necesarias para resolver el problema, en primera instancia, se utilizarán datos recogidos de los helicópteros existentes en la actualidad. Se realiza una lista con helicópteros de masa superior, inferior y próxima a la del helicóptero objetivo y se recaban datos correspondientes a número de palas, diámetro del rotor, a la cuerda y al régimen de giro. En una segunda etapa, se utilizarán algunas correlaciones que se proponen en la bibliografía encontrada para el diseño de palas de helicópteros (J.L. López Ruiz, 1993) para calcular el resto de parámetros necesarios.

Uno de los parámetros más críticos a la hora del diseño de un helicóptero es la superficie engendrada por el giro de las palas. La superficie discal del rotor condiciona fuertemente las actuaciones y la masa en vacío del helicóptero. Una superficie discal grande conduce a menores exigencias de potencia para vuelo a punto fijo y a menores velocidades de descenso en autorrotación, pero conlleva palas de mayor peso y un régimen de giro menor, lo cual se traduce en un mayor peso del reductor.

Con respecto al régimen de giro del rotor, el factor que mayormente lo limita es el desprendimiento de la capa límite en la punta de la pala, dónde alcanzan las mayores velocidades. Entonces solo se tiene que asegurar que no se supera el número de Mach crítico en la punta de la pala y se elige la velocidad más elevada posible ya que así se reduce el par transmitido y por tanto el tamaño de los elementos de la transmisión.

La elección del número de palas es un factor que afecta directamente a las exigencias estructurales que va a tener cada pala. Si su número es muy elevado la masa del cubo aumenta y las palas deberían ser menos rígidas lo que daría lugar a posibles problemas aerodinámicos.

En cuanto a la masa por unidad de longitud y a la rigidez específica se puede deducir que dependen de la constitución estructural de la pala, la forma de la sección y los materiales utilizados. De todos modos, se puede hacer una primera estimación de la

masa por unidad de longitud, como propone la bibliografía comentada anteriormente, ya que ésta es proporcional a la cuerda según la relación:

$$m(Kg / m) = 20 * c(m)$$

Lo mismo sucede con la rigidez específica que se ajusta bien a la ecuación:

$$EI(N * m^2) = 20000 * c(m)$$

En la siguiente figura se puede apreciar los valores de las masas por unidad de longitud en función de la cuerda de varios helicópteros comerciales:

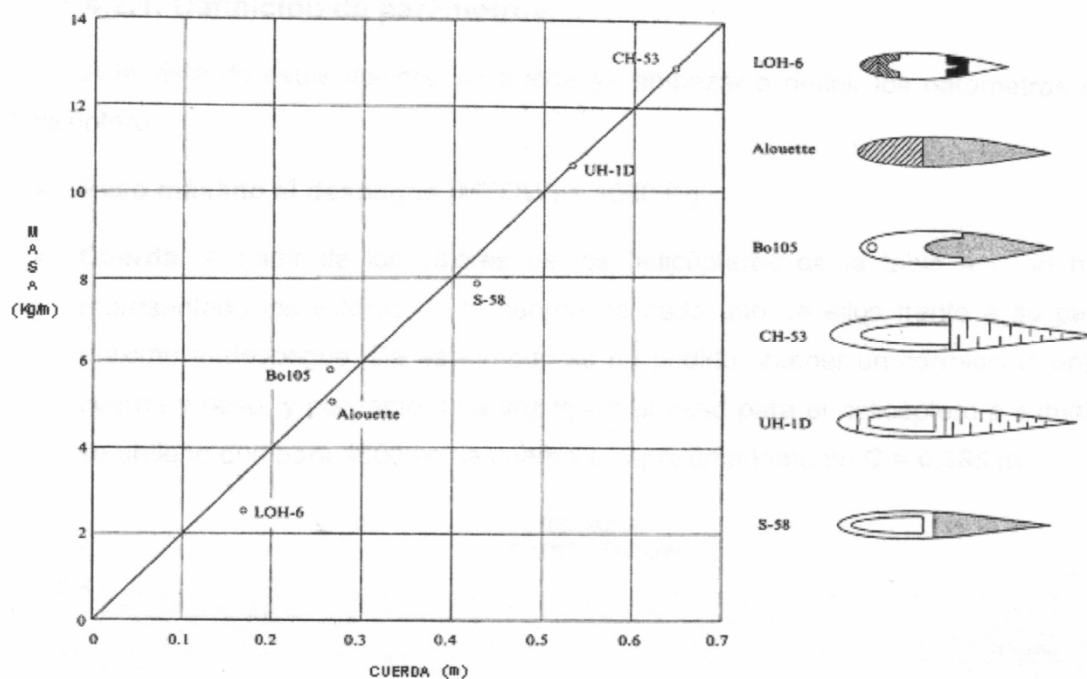


Figura 4.1 – Masa por unidad de longitud en función de la cuerda (J.L. López Ruiz, 1993)

A continuación se muestra una tabla que recoge los datos de helicópteros comerciales que sirven para determinar los parámetros que son necesarios. Estos datos fueron recogidos de Jane's all the world's Aircraft 2004-05.



Modelo	MTOW (Kg.)	Nº Palas	Diámetro (m)	Régimen de giro (rpm)	Cuerda (m)
Brantley B-2B	757	3	7,24	472	0,22
Enstrom 280FX	1179	3	9,75		0,24
Enstrom 480B	1360	3	9,75	372	
Cartercopter CC1	2268	2	13,26	425	0,43
MD Explorer	2835	5	10,31	392	
Kaman K-1200	2948	4	14,73	270	
Bell 430	4218	4	12,8	335	0,361
Eurocopter AS 365N DAUPHIN2	4250	4	11,94	350	0,385
Eurocopter EC155B	4800	5	12,6	350	0,405
Sikorsky S76	5307	4	13,41	316	0,39
Bell 412	5397	4	14,02	314	0,4
Boeing Sikorsky AH-66 Comanche	5799	5	12,19	400-472	
W-3 Sokol FALCON	6400	4	15,7	268	0,44
Kamov Ka-62	6500	4	13,5		
Bell 209 SuperCobra AH-1W	6690	2	14,63	311	0,84
Eurocopter France IAR-330L Puma	7400	4	15,08	265	0,6
Bell 214-ST	7938	2	15,85	287	0,84
Aerospatiale AS332 SuperPuma	8600	4	15,6	265	0,6
Atlas CSH-2 Rooivalk	8750	4	15,58	265	
Eurocopter SuperPuma Mkl	9000	4	15,6	265	0,6
Sikorsky S-61N	9299	5	18,9	209	0,46
Boeing AH-64A Apache	9525	4	14,63		0,53
Eurocopter SuperPuma MkII	9750	4	16,2	265	
Sikorsky S-70A Black Hawk	9977	4	16,36		
NH-90	10000	4	16,3	256	0,65
Chaign CHANGHE Z-8	10592	4	18,9		
Mil Mi-28	11400	5	17,2	242	0,67
Mil Mi-24	12000	5	17,3		
Sikorsky S-92	12156	4	17,71		
Mil Mi-17	13000	5	21,29		
EH I EH-101	14288	5	18,59		
Mil Mi-38	15600	6	21,1		
Boeing MH-47E	24494	6	18,29		0,81
Mil Mi-26	56000	8	32	132	

Tabla 4.1 – Características de helicópteros. (Jane's all the world's Aircraft, 2004-05)

Los datos en negrita son los que se han utilizado para el cálculo de los parámetros ya que son valores más próximos en peso y además contienen la información completa.

4.2.1 Definición de parámetros

Con los datos recogidos se puede empezar ya definir los parámetros del helicóptero.

- **Peso máximo al despegue (MTOW):** como se mencionó anteriormente el objetivo de este proyecto es diseñar las palas de un helicóptero medio que pueda transportar entre 16 y 18 pasajeros, por lo que éste parámetro queda fijado en **7500 Kg.**
- **Cuerda:** A partir de los valores de los helicópteros recogidos en la tabla 4.1 se realiza una gráfica en la que se representa los valores de la cuerda en función del peso máximo al despegue. Con estos valores se obtiene una correlación entre la cuerda y el peso máximo al despegue (figura 4.2). Posteriormente, se entra en la correlación con el peso máximo al despegue que se ha fijado y se obtiene un valor de la cuerda de **0,53 m.**

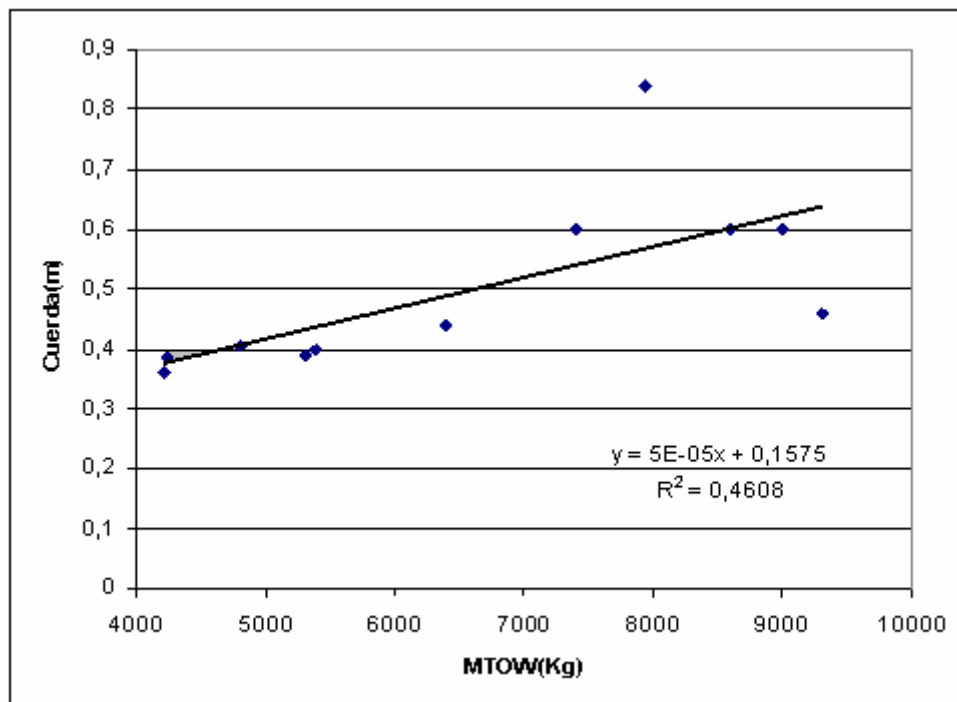


Figura 4.2 – Relación entre Cuerda/MTOW

- **Diámetro del rotor:** De igual manera se opera con el diámetro del rotor. Con los datos recogidos se construye una gráfica con los datos del diámetro del rotor en función del peso máximo al despegue. Una vez obtenida la correlación Diámetro/MTOW (figura 4.3) se entra en la recta con el valor de 7500 Kg. y se alcanza un valor de diámetro del rotor de **15,34 m.**

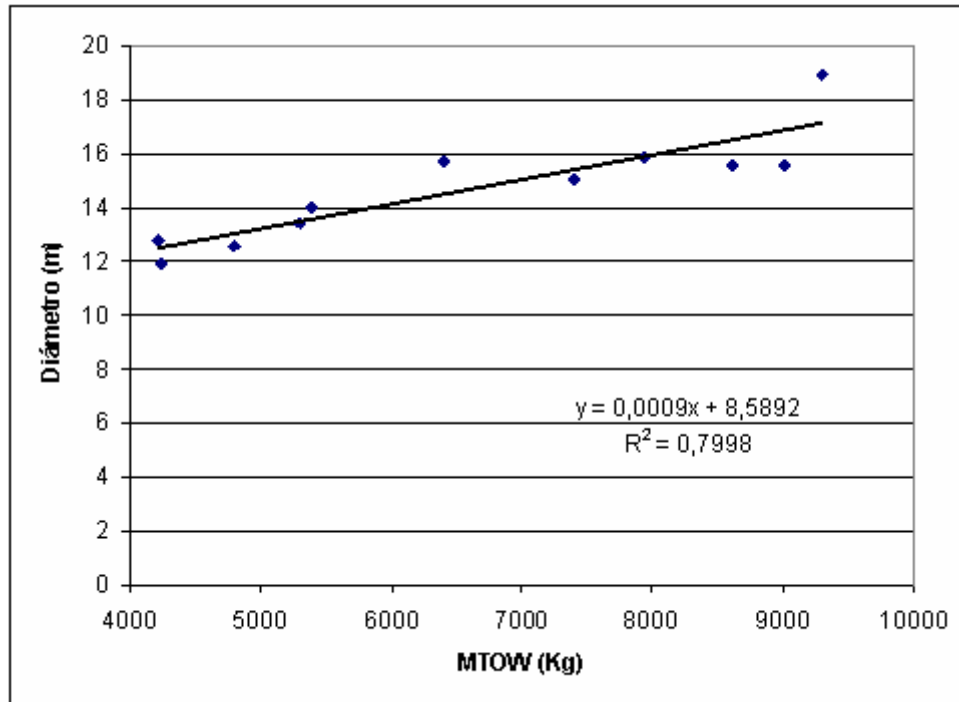


Figura 4.3 – Relación entre Diámetro/MTOW

- **Régimen de giro:** Al igual que se operó con la cuerda y el diámetro del rotor se procede a hallar el valor del régimen de giro. Se realiza la gráfica de régimen de giro frente a peso máximo al despegue (figura 4.4) y con la correlación obtenida, se entra con el valor fijado de MTOW y se calcula el valor del régimen de giro que es **275.65 rpm**.

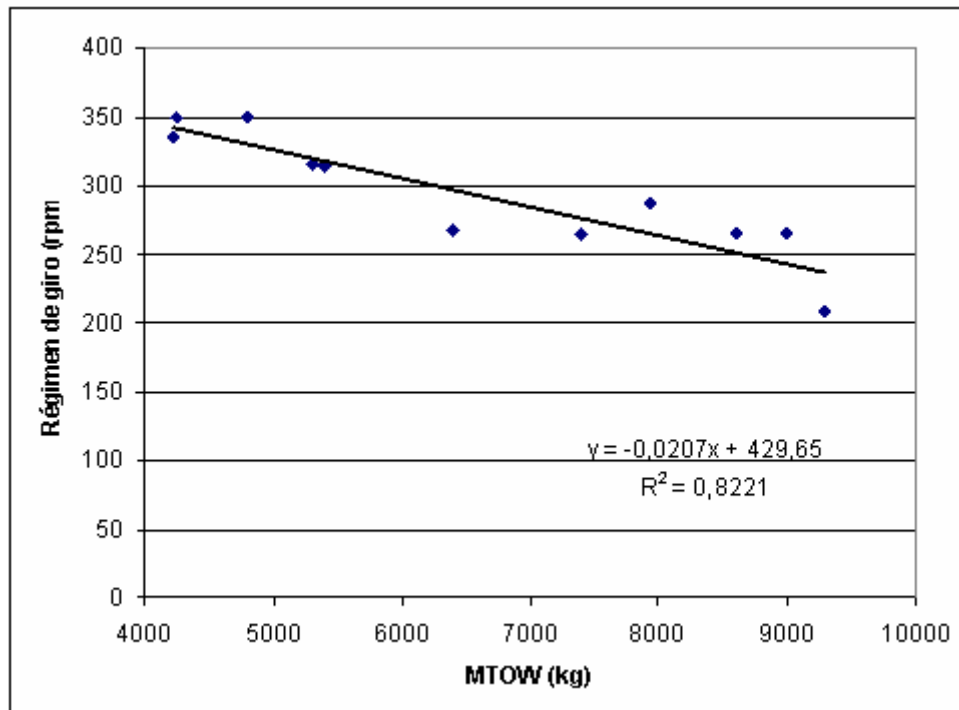


Figura 4.4 – Relación entre Régimen de giro/MTOW



Con el valor del régimen de giro y el diámetro del rotor se puede obtener el valor de la velocidad en la punta de la pala. El valor resultante es de 790,82 Km/h. Éste es un valor por debajo de la velocidad del sonido, por lo que de esta manera se evita problemas de desprendimiento de la capa límite (no habría problema de régimen transónico, mirar número de mach).

- **Número de palas:** Debido a la mayor utilización se tomará como número de palas **4**.
- **Excentricidad:** Para obtener el valor de este parámetro los autores en la bibliografía (J.L. López, 1993) utilizan el 5% del radio del rotor, por lo que:

$$e = 0.05 \cdot \frac{D}{2} = 0.38m$$

- **Masa por unidad de longitud:** Atendiendo a la relación antes citada se puede calcular la masa por unidad de longitud como:

$$m = 20 \cdot c = 20 \cdot 0.53 = 10.6Kg / m$$

No obstante, este valor es una estimación ya que el verdadero valor de la masa por unidad de longitud se puede calcular mediante el área transversal de la pala y su densidad. Para ello es necesario conocer el material que conforma la pala y resolver el problema estático para así conocer el número de laminados que llevará cada pared y de este modo conocer el área transversal de la sección.

- **Rigidez específica a flexión:** La rigidez específica a flexión se calculará en primera instancia con la relación recomendada en la bibliografía:

$$EI = 20000 \cdot c = 20000 \cdot 0.53 = 10600Nm^2$$

Al igual que sucede con la masa por unidad de longitud, este valor es una primera estimación del valor de la rigidez específica a flexión. Sin embargo, el valor real de este parámetro se calculará más adelante una vez se conozca las dimensiones geométricas del perfil y el tipo de material.

- **Factor de cargas:** Para los cálculos necesarios en el dimensionado del rotor se usará un factor de carga de **3,5**.
- **Cargas:** Las cargas actuantes sobre la pala serán las aerodinámicas (se detalla en el siguiente apartado cual es el valor de esta fuerza) y la fuerza centrífuga. Se considerarán despreciables las fuerzas debidas al propio peso de la pala, al ser éstas muy inferiores en orden de magnitud.

4.2.2 Carga aerodinámica

Para la distribución de carga aerodinámica a lo largo de la envergadura de la pala la bibliografía especializada (J.L. López, 1993) aconseja utilizar la función x^2 debido a que la carga es nula en el extremo articulado y crece aproximadamente de forma cuadrática según avanzamos hacia el extremo libre. Sin embargo, esta aproximación resulta inexacta debido a que la carga aerodinámica resulta nula en el extremo libre. Por ello, en el presente proyecto para aproximar a un caso real la distribución de carga aerodinámica se ha extraído información de ensayos en túneles del viento (NACA tn-2953, 1953).

Esta carga presenta variaciones significativas con respecto a las diferentes posiciones que adopta la pala en su funcionamiento. La siguiente figura muestra curvas de carga aerodinámica constantes para la rotación completa de la pala.

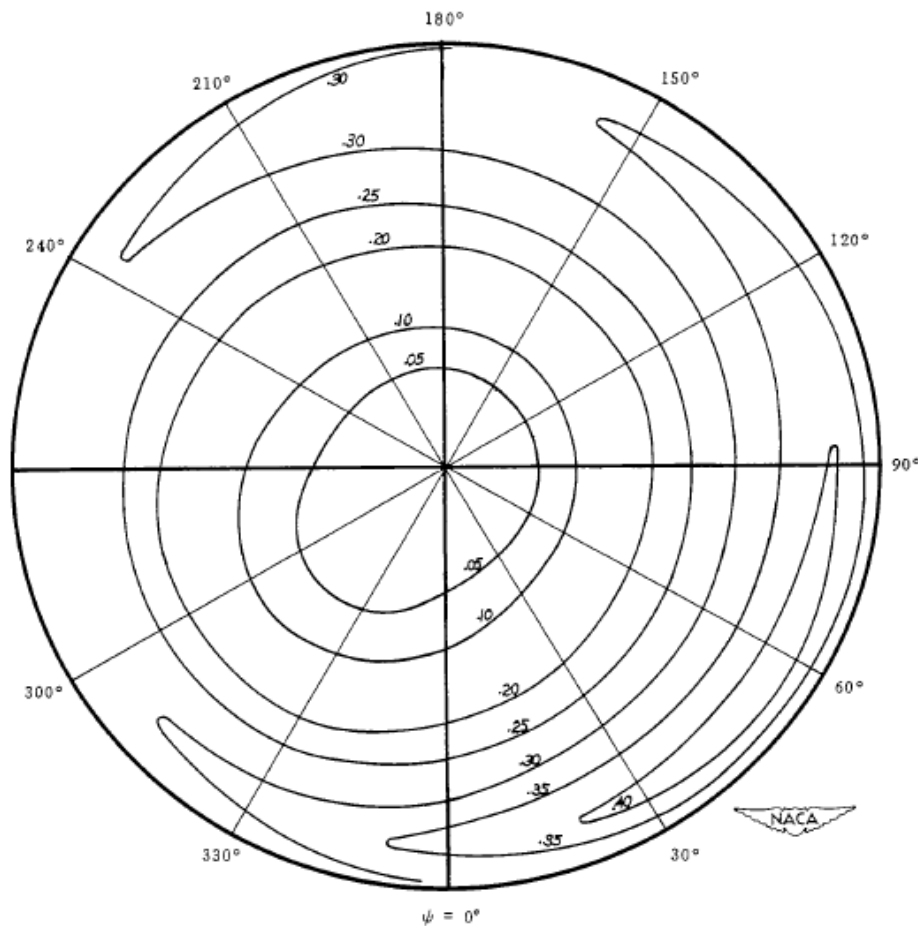


Figura 4.5 – Curvas de carga aerodinámicas constantes en libras por pulgada. Perfil NACA 0015; velocidad 800 rpm (NACA tn-2953, 1953)

A continuación se muestra la distribución de carga aerodinámica a lo largo de la pala para las cuatro posiciones azimutales de esta.

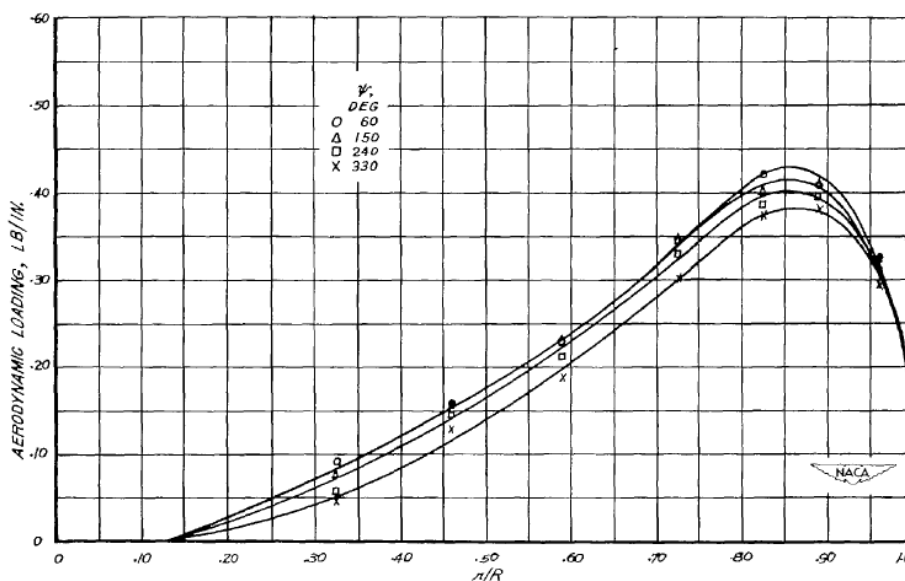


Figura 4.6 – Distribución de carga aerodinámica a lo largo de la pala para varias posiciones azimutales. Perfil NACA 0015, velocidad 800 rpm. (NACA tn-2953, 1953).

Como se puede observar la distribución de carga a lo largo de la envergadura de la pala es nula en el extremo articulado y crece aproximadamente de forma cuadrática hasta la distancia adimensional 0,85. A partir de este valor decrece rápidamente hasta hacerse nula en el extremo libre. Para calcular la carga aerodinámica, de todas estas curvas se toma la de mayor valor ya que será la que aporte mayores esfuerzos a la pala. Seleccionando la curva de 60° y pasándola a unidades del sistema internacional queda:

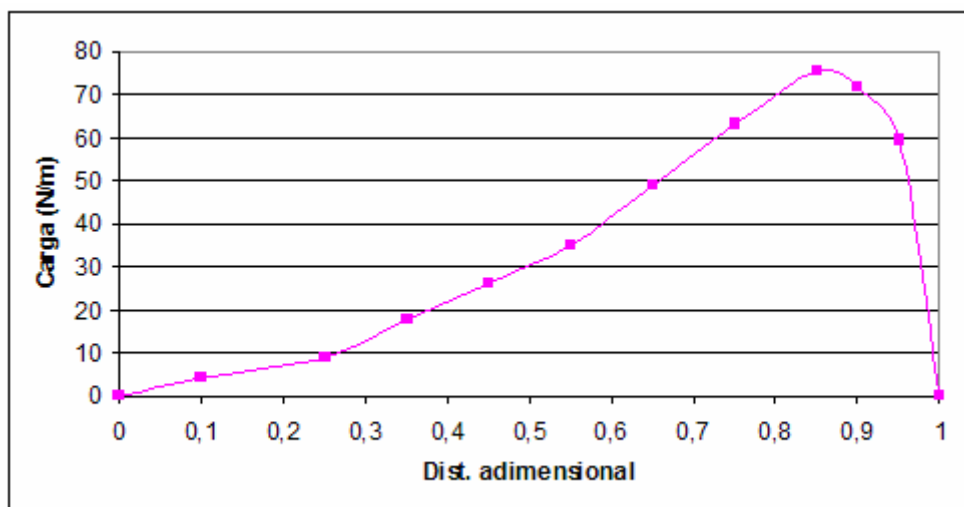


Figura 4.7 – Distribución de carga a lo largo de la pala en SI

Para la realización de la figura 4.7 se ha extraído un total de 12 puntos de la figura 4.6 y se han pasado a unidades del Sistema Internacional. La información de dichos puntos se muestra en la siguiente tabla:

x	Carga (N/m)	Carga (lb/in)
0	0	0
0,1	4,375	0,025
0,25	8,75	0,05
0,35	17,5	0,1
0,45	26,25	0,15
0,55	35	0,2
0,65	49	0,28
0,75	63	0,36
0,85	75,25	0,43
0,9	71,75	0,41
0,95	59,5	0,34
1	0	0

Tabla 4.2 – Valores extraídos de la gráfica

Como posteriormente se verá, para la resolución del problema estático se trabajará con la carga aerodinámica adimensional. Para ello, se tomará el valor mayor de carga aerodinámica y se dividirá por él cada uno de los puntos de la gráfica de manera que se obtiene la siguiente gráfica:

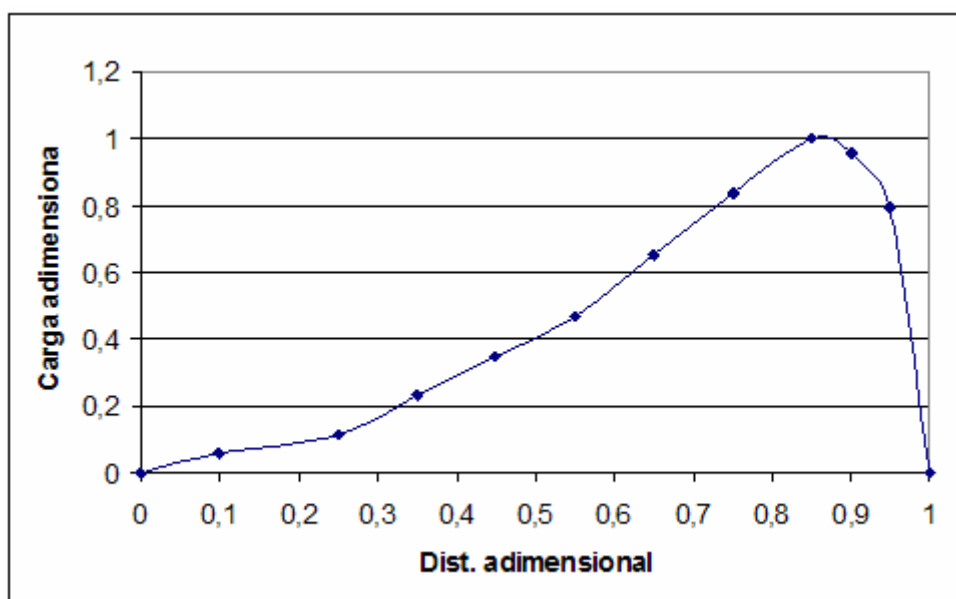


Figura 4.8 – Distribución de carga adimensional a lo largo de la pala

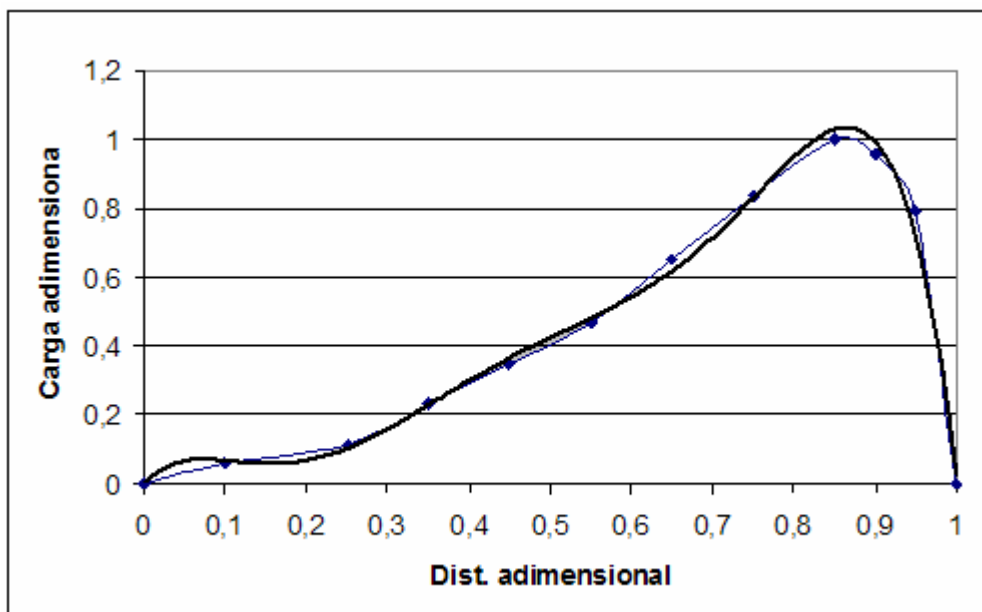
En la siguiente tabla se muestra la información que tienen los 12 puntos que conforman la figura 4.8:

x	Carga (N/m)	Carga adimensional
0	0	0
0,1	4,375	0,058
0,25	8,75	0,116
0,35	17,5	0,232
0,45	26,25	0,349
0,55	35	0,465
0,65	49	0,651
0,75	63	0,837
0,85	75,25	1
0,9	71,75	0,953
0,95	59,5	0,790
1	0	0

Tabla 4.3 – Valores obtenidos de la gráfica

Con estos datos ya se puede obtener la función de carga aerodinámica adimensional $g(x)$ tal que:

$$g(x) = \frac{F(x)(N/m)}{F_{\max}(N/m)}$$



4.9 – Representación de la función $g(x)$



Siendo la función $g(x)$ resultante:

$$g(x) = -135.26x^6 + 355.26x^5 - 351.06x^4 + 160.33x^3 - 31.82x^2 + 5.5883x - 0.0025$$

Ahora se pretende ajustar la función obtenida al problema que en este proyecto se estudia. Para ello, se debe calcular el esfuerzo real que soporta cada pala. Suponiendo que la distribución de carga dimensional es una función $f(r)$, el esfuerzo que deberá sufrir cada pala es:

$$F = \frac{\text{factor carga} \cdot \text{Peso}}{n^{\circ} \text{ palas}} = \frac{3.5 \cdot 7500 \cdot 9.81}{4} \approx 64380N$$

Si $f(x)$ es la distribución de cargas se deberá cumplir que:

$$F = \int_0^L f(r) \cdot dr = \int_0^1 f(x) \cdot L \cdot dx = \int_0^1 g(x) \cdot L \cdot F_{\max} \cdot dx$$

Con lo que se puede obtener el valor de F_{\max}

$$F_{\max} = \frac{F}{L \cdot \int_0^1 g(x) \cdot dx} = \frac{F}{(R-e) \cdot \int_0^1 g(x) \cdot dx} = 21233N/m$$

Por lo que resulta que la función de carga aerodinámica es:

$$F(x) = F_{\max} \cdot g(x)$$

$$F(x) = -2871975.6 \cdot x^6 + 7543235.6 \cdot x^5 - 7454057 \cdot x^4 + 3404286.9 \cdot x^3 - 675634.1 \cdot x^2 + 54957.4 \cdot x - 53.1$$

Que representada queda de la siguiente manera:

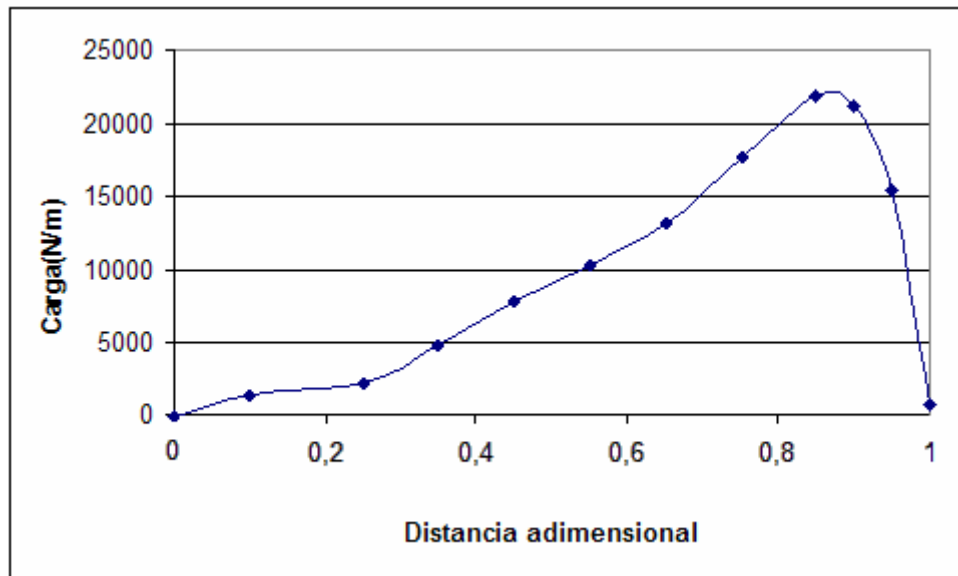


Figura 4.10 – Distribución de carga aerodinámica a lo largo de la pala para MTOW=7500Kg

Seguidamente se comprueba que la fuerza total ejercida por esta distribución es igual a la fuerza necesaria:

$$\int_0^{R-e} F(r) \cdot dr = (R-e) \cdot \int_0^1 F(x) \cdot dx \approx 64120N$$

Este valor resulta inferior al calculado anteriormente 64380N. Aún así este valor se tomará como válido ya que éste es muy próximo y la divergencia es consecuencia de las aproximaciones realizadas a lo largo de los cálculos.

4.3 DEFINICIÓN DEL PERFIL Y MATERIALES

Hasta hace relativamente poco, para la fabricación de elementos estructurales se utilizaba únicamente el acero, el aluminio o la madera. Actualmente, esta tendencia ha cambiado, incorporándose a la elaboración de estos elementos los materiales compuestos, llamados composites. La mayor ventaja que supone la introducción de estos materiales es el poseer unas elevadas propiedades específicas.

El uso de materiales compuestos en la construcción de palas de rotor de helicópteros se ha visto incrementado debido a sus excelentes propiedades, ya que tienen un comportamiento a fatiga mejor que los metales, así bajos costes de producción y mantenimiento y unas excelentes propiedades rigidez/peso y resistencia/peso. Esto les hace idóneos para el uso en aeronáutica, puesto que con ellos se consigue disminuir notablemente el peso de las palas y por tanto el tamaño del cubo del rotor.

4.3.1 Diseño del perfil

Alternativamente, otra manera de aumentar la rigidez es diseñar la sección de la pala de tal manera que se incremente su inercia. Para ello, se recurre a dos tipos de disposiciones, las secciones sándwich o las cajón. Estas secciones dotan de una mayor inercia a la pala sin aumentar apenas el peso de las mismas.

Las estructuras sándwich son construcciones laminares constituidas por dos pieles o revestimientos unidos a un cuerpo central (núcleo) relativamente ligero, resultando un panel de elevada rigidez y poco peso.

La tabla adjunta muestra esquemáticamente la comparación entre una estructura homogénea y dos estructuras sándwich equivalentes en peso, pudiendo comprobarse la superior eficiencia estructural de estas últimas en términos de resistencia y rigidez.



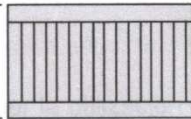
	Material sólido 	Material de relleno de espesor t 	Material de relleno de espesor 3t 
Rigidez flexión	1	7	37
Resistencia	1	3,5	9,25
Peso	1	1,03	1,06

Tabla 4.4 – Comparación entre estructura homogénea y sándwich

La principal función de las pieles es la de soportar las cargas aplicadas. Estas pieles pueden estar formadas por laminados de composite, madera o metálicos. En aplicaciones de carácter estructural la misión del núcleo es resistir la transmisión de los esfuerzos de cortadura de una piel a otra, así como resistir también en compresión.

Por su parte, las secciones cajón están constituidas por 4 paredes, que pueden estar compuestas por metal, madera o composite, formando un rectángulo como se muestra en la Figura 4.11.

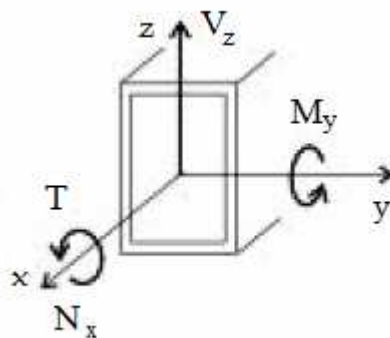


Figura 4.11 – Representación de una sección cajón

Las características estructurales de la sección cajón son similares a las tipo sándwich, es decir, por una parte, aumenta la inercia de la sección lo que da lugar a un incremento en la rigidez a flexión y por otra, un aumento de la resistencia sin penalizar apenas en peso. Estas características mecánicas de este tipo de secciones hace que sean las más utilizadas para el diseño de palas de helicópteros siendo las palas únicamente formadas por secciones sándwich o una combinación de ambas propuestas a lo largo de la envergadura la solución más habitual en el diseño final.

El objetivo que persigue el presente proyecto es el estudio de vigas de material compuesto cuya sección está formada por paredes delgadas. Por tanto, se seleccionará la sección cajón para la resolución del problema.

El perfil a usar será el correspondiente a la serie NACA 23012, perfil profusamente utilizado en aeronáutica, el cual indica que el máximo espesor de este se encuentra a una distancia del borde de ataque igual al 23% de la cuerda y este espesor máximo es igual al 12% de la cuerda de la pala:

$$e_{\text{perfil}} = 0,12 \cdot 530\text{mm} = 63,6\text{mm}$$

A efectos resistentes, se va a considerar que el perfil se encuentra dividido en un primer 10% de la cuerda correspondiente al borde de ataque, un 40% en la que se encontrará la sección cajón, y que será la zona diseñada para soportar los esfuerzos de la pala, y una zona final correspondiente al 50%, que conforma el borde de salida del perfil y de la que se supondrá que no soporta carga, figura 4.12.

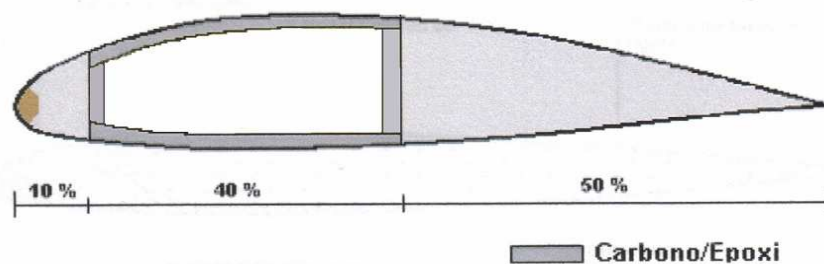


Figura 4.12 – Esquema de la composición del perfil

Sin embargo, al ser esto un diseño preliminar de la pala, no se va a tener en cuenta la curvatura que presenta el perfil, por lo que se va a suponer que la zona resistente tiene una forma rectangular de altura 63,6 mm y una anchura del 40% de la cuerda, esto es $B=212$ mm. De todos modos, este valor de la anchura de la parte resistente como los valores de cuerda y espesor solo son válidos para la sección articulada de la pala ya que para optimizar el diseño se hará una reducción lineal de estos valores hasta el extremo libre. De esta forma, la expresión general para anchura de la parte resistente y el espesor de este es:

$$e(x) = 0,12 \cdot c(x)$$

$$B(x) = 0,4 \cdot c(x)$$

Donde $c(x)$ representa la variación de la cuerda a lo largo de la envergadura de la pala. $B(x)$ es el ancho de la sección cajón y $e(x)$ es el espesor de este.

4.3.2 Diseño del laminado

Una vez elegida la sección, el siguiente paso es caracterizar el material del que estará formada la pala. Como se ha comentado hasta ahora se ha escogido que esté realizada de material compuesto y en concreto, se ha seleccionado un laminado formado por fibras de carbono en matriz de epoxi. A continuación, se muestran las propiedades características de estos materiales:



PROPIEDADES DE LA LÁMINA	Fibras de Carbono AS-4 Matriz Epoxi 35-01-G	
Módulos de Young	$E_1 = 118GPa$	
	$E_2 = E_3 = 10GPa$	
Módulos de Cortadura	$G_{12} = G_{13} = G_{23} = 6,2GPa$	
Coeficiente de Poisson	$\nu_{21} = 0,25$	
	$\nu_{23} = \nu_{13} = 0.3$	
Espesor de cada lámina	$h_i = 0,1mm$	
Densidad	$\rho = 1582Kg / m^3$	
VALORES DE RESISTENCIA	Tracción	Compresión
Dirección fibras	$X_t = 1930MPa$	$X_c = 1438MPa$
Perpendicular a fibras	$Y_t = 48MPa$	$Y_c = 200MPa$
Cortadura	$S_{xy} = 79MPa$	

Tabla 4.5 – Propiedades de la lámina

El laminado está constituido por láminas apiladas con diferentes orientaciones. La secuencia elegida de apilado de las láminas será la cuasi-isótropa $[+45, -45, 0, 90]_{ns}$ que consta de cuatro láminas orientadas según los ángulos indicados, simétrica y repetida n veces. Dicho laminado posee propiedades parecidas en cualquier dirección, y gracias a este comportamiento isótropo del material compuesto equivale a un material tradicional continuo pero de bajo peso.

CÁLCULO DE LOS PARÁMETROS DE LA SECCIÓN

5.1 INTRODUCCIÓN

Hasta el momento se han determinado los parámetros relativos a las características geométricas de las palas así como el régimen del rotor. Para terminar de caracterizar las palas del helicóptero, que en este documento se estudia, es necesario calcular las propiedades de la sección. Las propiedades necesarias para definir el problema a resolver son la rigidez a lo largo de la envergadura de la pala y la masa en las secciones libre y articulada. Como se ya se ha mencionado, la cuerda y la anchura de la sección de la pala varían con la envergadura. Por tanto, la rigidez y la masa son variables con la dimensión x de la pala.

La sección elegida para que conforme la pala es la sección cajón. Este tipo de secciones al igual que las secciones sándwich dotan a la pala de una elevada rigidez. Esto es debido a que el momento de inercia es alto ya que la distancia de las paredes al centro de gravedad de la sección es mayor comparado con una sección maciza. Esto hace que este tipo de secciones tengan menor peso específico porque para una misma rigidez es menor el material necesario que la debe componer.

Para determinar estas propiedades, en el caso de una sección sándwich, se puede seguir la teoría de vigas sándwich o lo que es algo más dificultoso en cuanto a coste computacional la teoría clásica de laminados. La sección cajón se podría estudiar con la teoría clásica de laminados pero al igual que en la sección sándwich es más sencillo e igual de preciso el utilizar la teoría de materiales compuestos de pared delgada. Consecuentemente, debido a que las paredes de la sección de las palas de los helicópteros son de unos pocos milímetros, se utilizará de aquí en adelante la teoría de materiales compuestos de pared delgada.

A continuación se pasa a calcular, en primer, lugar la rigidez a lo largo de la envergadura de la pala y posteriormente las masas en las secciones libre y articulada.



5.2 CÁLCULO DE LA RIGIDEZ

Uno de los parámetros más importantes para caracterizar el laminado es la rigidez de la sección. A continuación se expondrá la teoría para calcular dicha rigidez para posteriormente mostrar los resultados derivados de la aplicación de las ecuaciones de esta teoría.

En primer lugar hay que tener en cuenta que se desea variar la cuerda y el espesor de la pala de forma lineal para así optimizar el peso de ésta. Esto hará que también varíe la rigidez en cada una de las secciones a lo largo de r , es decir, con la distancia desde la sección articulada hasta la sección libre. Por tanto, para definir la rigidez a lo largo de la pala, se calculará la rigidez en la sección articulada y en la sección libre y se supondrá que varía linealmente entre estos puntos. De esta forma, la rigidez $EI(r)$ depende de la rigidez en la sección articulada EI_1 y de la rigidez en la sección libre EI_0 como sigue:

$$EI(r) = (EI_1 - EI_0) \cdot \frac{r}{L} + EI_0$$

Donde L es la longitud total de la pala.

Para calcular la rigidez en las secciones articulada y libre se seguirá la teoría de materiales compuestos de pared delgada descrita en la bibliografía *Mechanics of composite structures* (Kollar & Springer, 2003). Para poder aplicarla hay que realizar unos pasos previos relativos a la obtención de las diferentes matrices del laminado. El procedimiento completo para su cálculo se desarrolla a continuación:

1. Calcular la matriz de rigidez de cada lámina según sus ejes principales
2. Obtener la matriz de rigidez de cada lámina en ejes globales
3. Combinar las matrices de rigidez para obtener la del laminado completo
4. Aplicar la teoría de secciones de pared delgada en materiales compuesto

Para que sea más sencillo seguir las expresiones que se van a utilizar, se va a mostrar en primera instancia las expresiones finales de la rigidez que es el parámetro que realmente se desea calcular, es decir, el punto 4 que se acaba de mencionar y se retrocederá en los pasos expuestos anteriormente.

Antes de mostrar las expresiones que se utilizarán en la teoría de secciones de pared delgada de materiales compuestos para el cálculo de la rigidez se va a definir los parámetros y ejes de una sección arbitraria (figura 5.1):

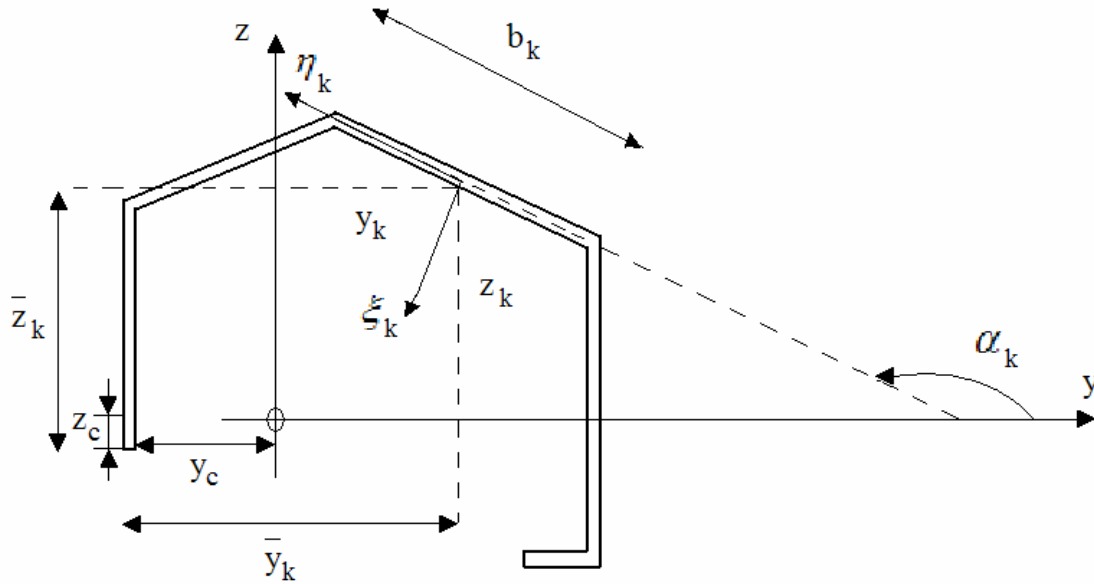


Figura 5.1 – Sección arbitraria en viga de material compuesto (Mechanics of composite structures (Kollar & Springer, 2003))

En la figura 5.1, la intersección entre los ejes “y” y “z” es el centroide de la sección. Para el cálculo de las coordenadas del centroide se utilizan las expresiones:

$$y_c = \frac{\sum_{k=1}^K \bar{y}_k \frac{b_k}{(\alpha_{11})_k}}{\sum_{k=1}^K \frac{b_k}{(\alpha_{11})_k}} \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^K \bar{z}_k \frac{b_k}{(\alpha_{11})_k}}{\sum_{k=1}^K \frac{b_k}{(\alpha_{11})_k}} \quad [5.1]$$

Donde :

$(\alpha_{11})_k$ es el primer término de la diagonal principal de la matriz de flexibilidad a axil del laminado,

b_k es la longitud de cada uno de los tramos que compone la sección según se puede observar en la figura 5.1

\bar{y}_k y \bar{z}_k son la distancia desde el centro del tramo considerado hasta el origen de coordenadas tomado respecto las direcciones “y” y “z” respectivamente.



Por último, para terminar de definir una sección arbitraria es necesario describir:

ξ_k que es el eje de coordenadas local del tramo considerado perpendicular a dicho tramo

η_k es el eje de coordenadas local del tramo considerado paralelo a dicho tramo

α_k que es el ángulo del tramo k que forma el eje η_k con el eje horizontal y.

Con todos estos parámetros definidos se puede aplicar la teoría de secciones de pared delgada en materiales compuestos desarrollada en la bibliografía *Mechanics of composite structures* (Kollar & Springer, 2003). Las expresiones para calcular las diferentes rigideces en una sección arbitraria ortotrópica de un laminado simétrico son:

- Rigidez a axil

$$EA = \sum_{k=1}^K \frac{b_k}{(\alpha_{11})_k} \quad [5.2]$$

- Rigidez flexión

$$EI_{yy} = \sum_{k=1}^K \left[\frac{1}{(\alpha_{11})_k} \left(b_k z_k^2 + \frac{b_k^3 \sin^2 \alpha_k}{12} \right) + \frac{b_k}{(\delta_{11})_k} \cos^2 \alpha_k \right] \quad [5.3]$$

$$EI_{zz} = \sum_{k=1}^K \left[\frac{1}{(\alpha_{11})_k} \left(b_k y_k^2 + \frac{b_k^3 \cos^2 \alpha_k}{12} \right) + \frac{b_k}{(\delta_{11})_k} \sin^2 \alpha_k \right] \quad [5.4]$$

Los términos α_{ij} y δ_{ij} pertenecen a las matrices de flexibilidad del laminado $[\alpha]$ y $[\delta]$. Estas matrices están relacionadas con las matrices de rigidez del laminado $[A]$ y $[D]$ de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^{-1} \quad [5.5]$$



$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}^{-1} \quad [5.6]$$

Cuando el laminado es simétrico, la matriz de flexibilidad es generalmente expresada como:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad [5.7]$$

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \quad [5.8]$$

Por tanto, para calcular la rigidez a axil y a flexión según las expresiones [5.2], [5.3] y [5.4] es necesario hallar los términos α_{ij} y δ_{ij} apropiados de la matriz de flexibilidad. Para ello, en primera instancia se debe determinar la matriz de rigidez como sigue a continuación:

$$\begin{aligned} [A] &= \int_{-h_i}^{h_i} [\overline{Q}] \cdot dz \\ A_{ij} &= \int_{-h_i}^{h_i} \overline{Q}_{ij} \cdot dz = \sum_{k=1}^K (\overline{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \end{aligned} \quad [5.9]$$

$$\begin{aligned} [D] &= \int_{-h_i}^{h_i} z^2 \cdot [\overline{Q}] \cdot dz \\ D_{ij} &= \int_{-h_i}^{h_i} z^2 \cdot \overline{Q}_{ij} \cdot dz = \sum_{k=1}^K (\overline{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad [5.10]$$

Para hallar las matrices de rigidez globales $[A]$ y $[D]$ es necesario determinar primero la matriz de rigidez de cada lámina en ejes globales $[\overline{Q}]$. Para ello, se debe calcular con anterioridad la matriz de rigidez de la lámina en ejes locales $[Q]$.



La matriz de rigidez de una lámina en ejes locales resulta:

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{ss} \end{bmatrix} \text{ donde } \begin{cases} Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{21} = \frac{\nu_{12}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{ss} = G_{12} \end{cases}$$

Y además $\nu_{12} = \nu_{21} \frac{E_2}{E_1}$ y por tanto $Q_{12} = Q_{21}$

Para obtener la matriz de rigidez de cada lámina en ejes globales se debe realizar un giro de esta mediante una matriz de transformación, de manera que:

$$\begin{aligned} \sigma_{glob} &= [T] \cdot \sigma_{loc} \\ \epsilon_{glob} &= [T] \cdot \epsilon_{loc} \\ \sigma_{glob} &= [T]^{-1} \cdot [Q] \cdot [T] \cdot \epsilon_{glob} \end{aligned}$$

Donde la matriz de transformación es:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ -2 \sin \alpha \cos \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$$

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \cdot [T]$$

Y por tanto se llega a:



$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{xx} & \bar{Q}_{xy} & \bar{Q}_{xs} \\ \bar{Q}_{xy} & \bar{Q}_{yy} & \bar{Q}_{ys} \\ \bar{Q}_{xs} & \bar{Q}_{ys} & \bar{Q}_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Donde

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{xx} &= Q_{11} \cos^4 \alpha + 2(Q_{12} + 2Q_{ss}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + Q_{22} \sin^4 \alpha \\ \bar{Q}_{xy} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{ss}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + Q_{12} (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) \\ \bar{Q}_{yy} &= Q_{11} \sin^4 \alpha + 2(Q_{12} + 2Q_{ss}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + Q_{22} \cos^4 \alpha \\ \bar{Q}_{xs} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{ss}) \sin \alpha \cos^3 \alpha + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{ss}) \cos \alpha \sin^3 \alpha \\ \bar{Q}_{ys} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{ss}) \cos \alpha \sin^3 \alpha + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{ss}) \sin \alpha \cos^3 \alpha \\ \bar{Q}_{ss} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{ss}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + Q_{ss} (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) \end{aligned}$$

A continuación se va a calcular numéricamente la rigidez a axil y a flexión de las secciones articulada y libre de la pala. En primer lugar, se determinará la matriz de rigidez de la lámina en ejes locales, en unidades de GPa:

$$Q = \begin{bmatrix} 118.63 & 2.513 & 0 \\ 2.513 & 10.053 & 0 \\ 0 & 0 & 6.2 \end{bmatrix}$$

Seguidamente se hallará las matrices de rigidez en ejes globales:

$$\bar{Q}_{45} = \begin{bmatrix} 39.627 & 27.227 & 27.144 \\ 27.227 & 39.627 & 27.144 \\ 27.144 & 27.144 & 30.914 \end{bmatrix} \quad \bar{Q}_{-45} = \begin{bmatrix} 39.627 & 27.227 & -27.144 \\ 27.227 & 39.627 & -27.144 \\ -27.144 & -27.144 & 30.914 \end{bmatrix}$$

$$\bar{Q}_0 = \begin{bmatrix} 118.63 & 2.513 & 0 \\ 2.513 & 10.053 & 0 \\ 0 & 0 & 6.2 \end{bmatrix} \quad \bar{Q}_{90} = \begin{bmatrix} 10.053 & 2.513 & 0 \\ 2.513 & 118.63 & 0 \\ 0 & 0 & 6.2 \end{bmatrix}$$



Ahora se pueden calcular las matrices de rigidez del laminado $[A]$ y $[D]$. Para ello se debe suponer un número de sublaminados iniciales. Como se ha dicho con anterioridad el laminado estará formado por láminas orientadas de la forma $[+45, -45, 0, 90]_{ns}$. Adelantando resultados finales, se supondrá que el sublaminado simétrico se va a repetir 1 vez. Por lo que, haciendo uso de las expresiones [5.9] y [5.10] las matrices de rigidez del laminado quedan:

$$A = \begin{bmatrix} 4.4643 & 1.3015 & 0.0000 \\ 1.3015 & 4.4643 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.5814 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \frac{N}{m}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2.1912 & 1.1155 & 0.3474 \\ 1.1155 & 1.7280 & 0.3474 \\ 0.3474 & 0.3474 & 1.2648 \end{bmatrix} N \cdot m$$

A partir de las matrices de rigidez del laminado se puede obtener las matrices de flexibilidad ya que están relacionadas mediante las expresiones [5.5] y [5.6] quedando éstas:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0.2448 & -0.0714 & 0.0000 \\ -0.0714 & 0.2448 & -0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 0.6323 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7} \frac{m}{N}$$

$$\delta = \begin{bmatrix} 0.6857 & -0.4284 & -0.0707 \\ -0.4284 & 0.8802 & -0.1241 \\ -0.0707 & -0.1241 & 0.8441 \end{bmatrix} \frac{1}{N \cdot m}$$

De estas matrices se pueden tener los términos α_{11} y δ_{11} necesarios para el cálculo de la rigidez a axil y a flexión en las secciones articulada y libre:

$$\alpha_{11} = a_{11} = 0.2448 \cdot 10^{-7} \frac{m}{N}$$

$$\delta_{11} = d_{11} = 0.6857 \frac{1}{N \cdot m}$$

Las expresiones [5.1], [5.2] y [5.3] sirven para calcular la rigidez en secciones arbitrarias. Desarrollando estas ecuaciones para una sección cajón quedan:

$$EA = \frac{1}{a_{11}}(2b_f + 2b_w) \quad [5.11]$$

$$EI_{yy} = \frac{b_f}{(a_{11})_f} \cdot \frac{d^2}{2} + \frac{2b_f}{(d_{11})_f} + \frac{2b_w^3}{12(a_{11})_w} \quad [5.12]$$

$$EI_{zz} = \frac{b_w}{(a_{11})_w} \cdot \frac{d_f^2}{2} + \frac{2b_w}{(d_{11})_w} + \frac{2b_f^3}{12(a_{11})_f} \quad [5.13]$$

Siendo cada una de las longitudes de la sección:

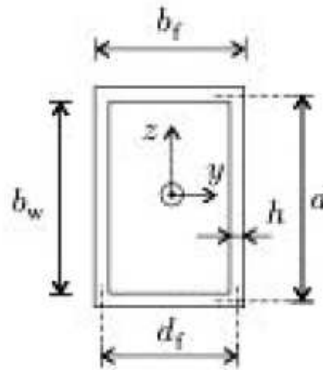


Figura 5.2 – Definición de longitudes en sección cajón

Por tanto, usando las longitudes anteriormente calculadas la rigidez a axil y a flexión en la sección articulada son:

$$EA_1 = 4.8725 \cdot 10^7 \text{ N}$$

$$EI_{yy1} = 4.5082 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

$$EI_{zz1} = 1.397 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

Para el cálculo de la rigidez en la sección libre se aplicará una reducción del valor de la cuerda y el espesor de la pala de un 10%. Por lo que los valores quedan:

$$EA_0 = 4.3382 \cdot 10^7 N$$

$$EI_{yy0} = 2.1535 \cdot 10^4 N \cdot m^2$$

$$EI_{zz0} = 9.4543 \cdot 10^5 N \cdot m^2$$

Como se puede observar al disminuir la sección de la pala disminuye la rigidez, este efecto se aprecia, sobre todo, en la rigidez sobre el eje y. La rigidez calculada mediante la correlación del apartado 4.2.1 daba un valor de $10600 N \cdot m^2$. Este valor es del mismo orden de magnitud que el hallado mediante la teoría de materiales compuestos para pared delgada aunque dista bastante de él. Esto es debido a que la rigidez es muy sensible a las longitudes características de la sección de la pala, es decir, variando no excesivamente estas dimensiones se podría obtener valores similares de rigidez. Finalmente se dan como válidos los valores de rigidez obtenidos mediante la teoría de materiales compuestos de pared delgada.

5.3 CÁLCULO DE LA MASA ESPECÍFICA

Para calcular la masa específica del perfil, se van a realizar una serie de simplificaciones. Aunque no todo el perfil tiene la misma configuración, se va a considerar que está entero recubierto con las pieles de carbono, ya que aunque se ha supuesto que el 60% del perfil no asume carga también deberá estar recubierto con algún otro material resistente a la abrasión y que tendrá por tanto similar densidad.

Para calcular el área de cada parte se va a asimilar las tres zonas, ataque, resistente y salida, a formas geométricas sencillas. De este modo se podría suponer que la zona de ataque es una semicircunferencia de diámetro 63,6 mm en extremo articulado y 57,24 mm en el extremo libre, que la zona resistente es un rectángulo de longitud 40% de la cuerda y que la zona de salida del perfil se asemeja a un triángulo igual al 50% de la cuerda.

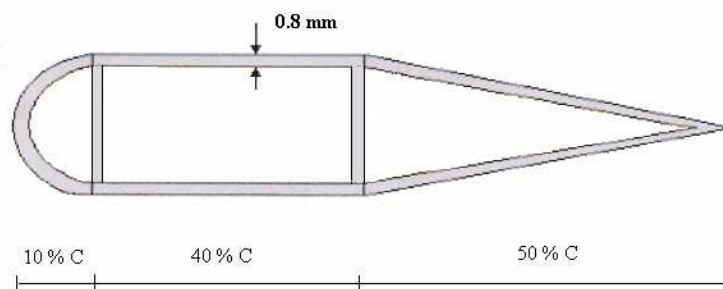


Figura 5.3 – Esquema simplificado del perfil



De este modo se obtienen los siguientes valores de áreas y de masas:

$$m_1 = A_1 \cdot \rho = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}(0.0318^2 \cdot \pi - (0.0318 - 0.0008)^2 \cdot \pi) \\ + (2 \cdot 0.4 \cdot 0.53 \cdot 0.0008) + (2 \cdot 0.0638 \cdot 0.0008) \\ + (2 \cdot 0.0008 \cdot \sqrt{0.0318^2 + (0.5 \cdot 0.53)^2}) \end{array} \right] \cdot 1582 = 1.51 \text{ Kg/m}$$

$$m_0 = A_0 \cdot \rho = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}(0.02862^2 \cdot \pi - (0.02862 - 0.0008)^2 \cdot \pi) \\ + (2 \cdot 0.4 \cdot 0.9 \cdot 0.53 \cdot 0.0008) + (2 \cdot 0.05724 \cdot 0.0008) \\ + (2 \cdot 0.0008 \cdot \sqrt{0.02862^2 + (0.5 \cdot 0.9 \cdot 0.53)^2}) \end{array} \right] \cdot 1582 = 1.33 \text{ Kg/m}$$

Como se puede comprobar, el valor obtenido para la masa específica es sustancialmente más bajo que el que se debería haber obtenido atendiendo a la correlación existente entre la masa y la cuerda ya que en este caso se tenía un valor de 10,6 Kg/m. De todos modos se tendrá en consideración el valor calculado numéricamente debido a que la correlación es más inexacta para palas con sección cajón al estar la mayoría compuestas por secciones sándwich.

5.4 RESUMEN DE PARÁMETROS

A continuación se recogen todos los parámetros anteriormente calculados que se utilizarán para el cálculo estructural de la pala y cálculo dinámico.

- Parámetros del helicóptero

MTOW	7500Kg
Cuerda	C=0.53m
Diámetro	D=15.34m
Número de palas	$n_p=4$
Factor de carga	$n_c=3.5$
Excentricidad	e=0.38m
Régimen de giro	$\Omega=275.65\text{rpm}$
Ancho de la zona resistente	B=40% C=0.212m

Tabla 5.1 – Resumen de parámetros del helicóptero

- Parámetros de la sección Ω

	Sección articulada	Sección libre
Masa específica	$1.51 \text{ Kg} / \text{m}$	$1.33 \text{ Kg} / \text{m}$
Rigidez específica	$4.5082 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^2$	$2.1535 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^2$

Tabla 5.2 – Resumen de parámetros de la sección

- Parámetros del laminado

Módulo de elasticidad	$E = 47.73 \text{ GPa}$	
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0.25$	
Valores de resistencia	Tracción	$X_t = 1930 \text{ MPa}$ $Y_t = 48 \text{ MPa}$
	Cortadura	$S_{xy} = 79 \text{ MPa}$
Materiales		Fibra de carbono en matriz Epoxi [45, -45, 0, 90]

Tabla 5.3 – Resumen de parámetros del laminado

5.5 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS PARÁMETROS

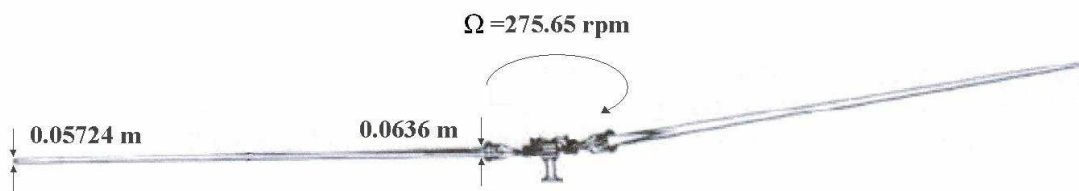


Figura 5.4 – Vista de perfil de las palas

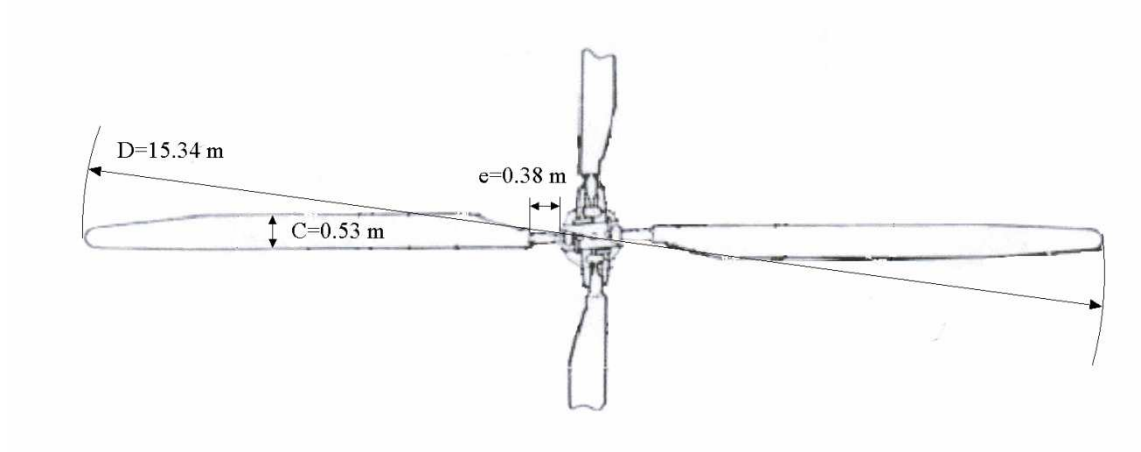


Figura 4.5 – Vista en planta de las palas

CÁLCULO ESTÁTICO

6.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo el objetivo es llevar a cabo un estudio estático de la pala del helicóptero. Para ello se debe tener en cuenta la geometría del problema y las cargas a las que está sometida dicha pala. Básicamente se trata de determinar los esfuerzos a los que está sometida a partir de las cargas que imponamos. Una vez determinados los esfuerzos se pasa a calcular las tensiones a las que están sometidos los materiales que conforman la pala. Se da por válido el diseño en el momento en que se comprueba que los valores de resistencia de los materiales no se ven superados por las tensiones a las que se ven sometidos o por lo menos cumplen los criterios de rotura que se apliquen. Las fuerzas que actúan sobre el helicóptero se consideran en equilibrio dinámico y son las siguientes:

- Aerodinámicas: debidas a la interacción del aire (fuerzas de rozamiento y de presión) con las palas del helicóptero.
- Másicas: principalmente debidas a la acción de la gravedad sobre la masa del helicóptero y a las inerciales producidas por las aceleraciones lineales y angulares a las que se ve sometido el helicóptero.
- De contacto: en los casos en que exista contacto con el suelo o agua se deben tener en cuenta las fuerzas debidas a ello.



Las fuerzas producen deformaciones en el helicóptero, y es preciso demostrar que, en todos los casos que puedan presentarse en la operación normal, las deformaciones producidas están dentro del límite elástico, es decir, que desaparecen al cesar la acción de las cargas aplicadas y, además, no dificultan el normal funcionamiento de los elementos móviles.

La demostración de la resistencia estructural exige, no solo un cálculo exhaustivo de las condiciones de operación, si no también la realización de una serie de ensayos en casos de carga previamente seleccionados y que se prevén críticos para partes esenciales de la estructura, aplicando las cargas aerodinámicas, máxicas y de contacto de forma progresiva, y midiendo esfuerzos y deformaciones en zonas críticas.

6.2 FLEXIÓN DE LAS PALAS

6.2.1 Introducción

Las palas de los rotores de los helicópteros constituyen el elemento más crítico, pues son las que proporcionan la sustentación y las acciones para el control del mismo. Por otro lado, un diseño basado en seguridad a pesar del fallo no resulta simple, por lo que se acuda normalmente a las técnicas de vida segura. En cualquier caso un cálculo estructural preciso y unos ensayos con cargas bien determinadas son esenciales a la hora de asegurar la integridad del helicóptero durante su vida operativa.

El cálculo estructural de una pala de un rotor de helicóptero no es, en general, un problema difícil ya que se trata de una viga compuesta con un extremo libre y el otro empotrado o articulado, según el modo de unión de ésta al cubo de rotor, sometida a unas fuerzas aerodinámicas, que producen la tracción y el par resistente, las gravitatorias e inerciales y, finalmente, a las fuerzas centrífugas, que son, normalmente, las de mayor magnitud de todas.

Una peculiaridad de las palas de los rotores es que poseen una gran flexibilidad, lo que permite una deformación relativamente grande, la cual, unida a la fuerza centrífuga, tiende a aliviar el momento flector en las distintas secciones. Existe una fuerte interacción entre la forma de la elástica y los momentos que actúan en cada sección, que no determina de forma directa la curvatura de la elástica en cada punto.



6.2.2 Ecuación de la elástica

Con el fin de ilustrar la naturaleza del problema se va a plantear el caso de flexión de palas en el denominado plano de cuerdas. En la figura 6.1 se van a definir como nuevos ejes los que corresponderían a la pala sin deformar con el origen en la articulación o empotramiento de la pala en el cubo (ejes y-r), esto es, a una distancia e del centro de rotación del eje del rotor, y que forman un ángulo β (ángulo de batimiento) con la horizontal.

Sobre un elemento de pala actúan:

- La fuerza de inercia: dF_c
- Las fuerzas aerodinámicas: $W_a dr$
- Las fuerzas gravitatorias e inerciales: $dW + dF_i$

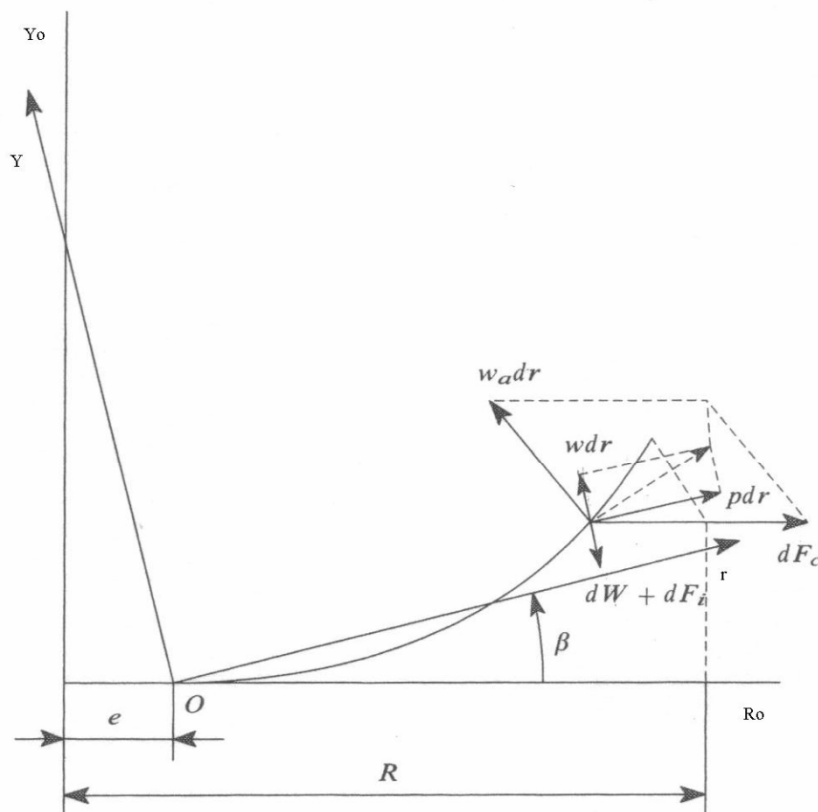


Figura 6.1 – Elástica de la viga

La resultante de la suma de todas ellas se puede descomponer según los ejes y-r en dos componentes pdr (paralela al eje Or) y wdr perpendicular a ella.

Equilibrio de fuerzas

Si se hace ahora el equilibrio de un elemento de la pala (Figura 6.2) se obtiene lo siguiente:

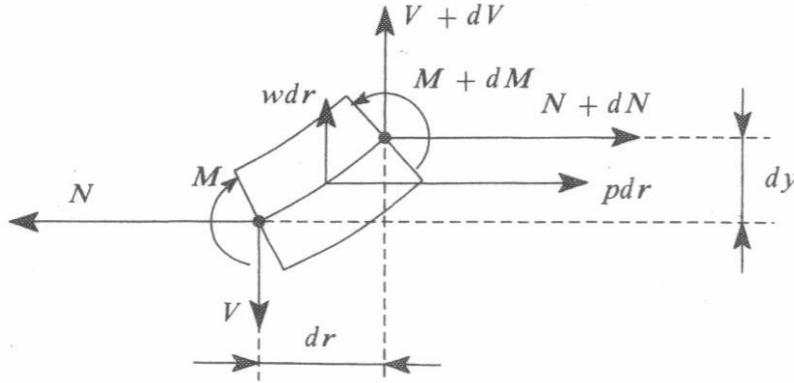


Figura 6.2 – Equilibrio de la rebanada

- Suma de fuerzas verticales:

$$-V + w(r) + V + dV = 0 \rightarrow \frac{dV}{dr} = -w(r)$$

$$V(r) = \int_r^{R-e} w(r_1) dr_1 \quad [6.1]$$

- Suma de fuerzas horizontales:

$$-N + p(r)dr + N + dN = 0 \rightarrow \frac{dN}{dr} = -p(r)$$

$$N(r) = \int_r^{R-e} p(r_1) dr_1 \quad [6.2]$$

- Suma de momentos

$$-M - (N + dN)dy + (V + dV)dr + M + dM + wdr \frac{dr}{2} - pdr \frac{dr}{2} = 0$$

$$\frac{dM}{dr} = -V + N \frac{dy}{dr} \quad [6.3]$$



De las expresiones anteriores se obtienen directamente las fuerzas normal N y cortante V en las secciones de la pala en función de las cargas aplicadas. Sin embargo, el momento flector está relacionado con la forma de la elástica según la expresión:

$$M(r) = EI \frac{d^2 y(r)}{dr^2} \quad [6.4]$$

Por tanto, si se introduce dicha expresión en [6.3], se deriva de nuevo y se desprecian los términos de segundo orden se obtiene:

$$\frac{d^2}{dr^2} \left(EI \frac{d^2 y}{dr^2} \right) - \frac{d}{dr} \left(N \frac{dy}{dr} \right) = - \frac{dV}{dr} \quad [6.5]$$

Introduciendo la expresión [6.1] resulta:

$$\boxed{\frac{d^2}{dr^2} \left(EI \frac{d^2 y}{dr^2} \right) - \frac{d}{dr} \left(N \frac{dy}{dr} \right) = w(r)} \quad [6.6]$$

Siendo ésta la expresión de **la ecuación diferencial de la elástica**.

Condiciones de contorno

Para completar la definición del problema diferencial es preciso establecer las condiciones de contorno. De este modo:

- En el extremo libre: $r = R - e$

$$M(R - e) = 0 \rightarrow y''(R - e) = 0$$

$$V = 0; N = 0 \rightarrow y'''(R - e) = 0$$

- En el origen: $r = 0$

$$y(r = 0) = 0$$

$$\begin{cases} \text{Pala empotrada: } y'(0) = 0 \\ \text{Pala articulada: } M = 0 \rightarrow y''(0) = 0 \end{cases}$$



La ecuación diferencial de cuarto orden queda así completada con las cuatro condiciones de contorno, dos en cada extremo, que dejan definido el problema diferencial y permite calcular la forma de la elástica y obtener, a partir de ella, la distribución de momentos flectores en las secciones de la pala.

Hipótesis

Para el diseño se ha tenido en cuenta la siguiente serie de hipótesis:

- En este estudio se despreciarán las fuerzas gravitatorias e inerciales frente a las fuerzas aerodinámicas y centrífugas que son de mayor magnitud.
- Los ángulos de deflexión de la viga serán pequeños.
- La ecuación se ha planteado para el caso estacionario en el que se supone que la forma de la elástica no depende del tiempo, lo cual es cierto en condiciones de vuelo axial, pero, en general, tanto las fuerzas aerodinámicas como las inerciales son funciones del tiempo dando origen a un problema de vibraciones.

De estas hipótesis se puede deducir por tanto que:

$$p(r) \approx m\Omega^2(r+e) \quad [6.7]$$

$$w(r) \approx w_a(r) - a_0 p(r) = w_a - a_0 m\Omega^2(r+e) \quad [6.8]$$

Siendo a_0 un coeficiente de conicidad y batimiento de la pala, que para el caso de pala empotrada viene fijado y para el de la pala articulada se calcula haciendo equilibrio de momentos entre fuerzas aerodinámicas y centrífugas como se verá más tarde.

Por tanto, según [6.1] y [6.2]:

$$N(r) = \Omega^2 \int_r^{R-e} m(r_1 + e) dr_1 \quad [6.9]$$

$$V(r) = \int_r^{R-e} w_a(r_1) dr_1 - a_0 \Omega^2 \int_r^{R-e} m(r_1 + e) dr_1 \quad [6.10]$$



6.2.3 Transformación en una ecuación integrodiferencial

El problema de contorno se transforma en una ecuación integrodiferencial multiplicando la ecuación diferencial de la elástica, [6.6] por $y(r)$ y se integra entre 0 y $(R-e)$ obteniendo:

$$\underbrace{\int_0^{R-e} y(r) \frac{d^2}{dr^2} \left(EI \frac{d^2 y(r)}{dr^2} \right) dr}_{I_1} - \underbrace{\int_0^{R-e} y(r) \frac{d}{dr} \left(N \frac{dy(r)}{dr} \right) dr}_{I_2} = \underbrace{\int_0^{R-e} w(r) y(r) dr}_{I_3} \quad [6.11]$$

A continuación se pasa a resolver la ecuación anterior. Para ello, se aplica la integración por partes a los términos I_1 e I_2 según se indica:

- Primer término de la ecuación

Se aplica dos veces integración por partes:

$$u = y(r) \qquad du = \frac{d}{dr} y(r)$$

$$dv = \frac{d^2}{dr^2} \left(EI \frac{d^2 y(r)}{dr^2} \right) \qquad v = \frac{d}{dr} \left(EI \frac{d^2 y(r)}{dr^2} \right)$$

Y queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \int_0^{R-e} y(r) \frac{d^2}{dr^2} \left(EI \frac{d^2 y(r)}{dr^2} \right) dr &= \left| y(r) \frac{d}{dr} \left(EI \frac{d^2 y(r)}{dr^2} \right) \right|_0^{R-e} - \\ &\quad - \int_0^{R-e} \frac{dy(r)}{dr} \frac{d}{dr} \left(EI \frac{d^2 y(r)}{dr^2} \right) \end{aligned} \quad [6.12]$$

Se aplican las condiciones de contorno:



$$\int_0^{R-e} y(r) \frac{d^2}{dr^2} \left(EI \frac{d^2 y(r)}{dr^2} \right) dr = - \int_0^{R-e} \frac{dy(r)}{dr} \frac{d}{dr} \left(EI \frac{d^2 y(r)}{dr^2} \right) dr \quad [6.13]$$

Se vuelve a aplicar otra vez la integración por partes:

$$u = \frac{d}{dr} y(r) \quad du = \frac{d^2}{dr^2} y(r)$$

$$dv = \frac{d}{dr} \left(EI \frac{d^2 y(r)}{dr^2} \right) \quad v = \left(EI \frac{d^2 y(r)}{dr^2} \right)$$

Y queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \int_0^{R-e} \frac{dy(r)}{dr} \frac{d}{dr} \left(EI \frac{d^2 y(r)}{dr^2} \right) dr &= \left| \frac{dy(r)}{dr} \left(EI \frac{d^2 y(r)}{dr^2} \right) \right|_0^{R-e} - \\ &\quad - \int_0^{R-e} \frac{d^2 y(r)}{dr^2} \left(EI \frac{d^2 y(r)}{dr^2} \right) dr \end{aligned} \quad [6.14]$$

Se aplica las condiciones de contorno:

$$I_1 = \int_0^{R-e} \frac{dy(r)}{dr} \frac{d}{dr} \left(EI \frac{d^2 y(r)}{dr^2} \right) dr = - \int_0^{R-e} \frac{d^2 y(r)}{dr^2} \left(EI \frac{d^2 y(r)}{dr^2} \right) dr \quad [6.15]$$

- Segundo término de la ecuación

Se aplica la integración por partes:

$$u = y(r) \quad du = \frac{d}{dr} y(r)$$

$$dv = \frac{d}{dr} \left(N \frac{dy(r)}{dr} \right) \quad v = \left(N \frac{dy(r)}{dr} \right)$$



Y queda de la siguiente forma:

$$\int_0^{R-e} y(r) \frac{d}{dr} \left(N \frac{dy(r)}{dr} \right) dr = \left[y(r) \left(N \frac{dy(r)}{dr} \right) \right]_0^{R-e} - \int_0^{R-e} \frac{dy(r)}{dr} \left(N \frac{dy(r)}{dr} \right) dr \quad [6.16]$$

Se aplican las condiciones de contorno:

$$I_2 = \int_0^{R-e} y(r) \frac{d}{dr} \left(N \frac{dy(r)}{dr} \right) dr = - \int_0^{R-e} \frac{dy(r)}{dr} \left(N \frac{dy(r)}{dr} \right) dr \quad [6.17]$$

Despejando las ecuaciones [6.15] y [6.17] en la ecuación [6.11]:

$$\frac{1}{2} \int_0^{R-e} EI \left(\frac{d^2 y(r)}{dr^2} \right)^2 dr + \frac{1}{2} \int_0^{R-e} N \left(\frac{dy(r)}{dr} \right)^2 dr = \frac{1}{2} \int_0^{R-e} w(r) y(r) dr \quad [6.18]$$

En la expresión anterior se puede observar que:

$$E_{Flexión} + E_{Alargamiento} = E_{cinética} \quad [6.19]$$

- $E_{Flexión}$: Denota la energía de flexión acumulada en la viga durante un proceso en el que se pasa de deformación nula, cuando $w(r) = 0$, a la deformación final correspondiente a la carga $w(r)$.

- $E_{Alargamiento}$: Denota la energía de alargamiento de los elementos en el campo de fuerza centrífuga.

- $E_{Cinética}$: Denota el trabajo realizado por las fuerzas $w(r)$ al pasar del estado inicial nulo al estado final de cargas aplicadas.

Se ve que esta ecuación integrodiferencial que se obtiene expresa la conservación de la energía en el proceso de deformación y da la distribución entre energía de flexión y energía de alargamiento de la viga.



6.2.4 Adimensionalización

A continuación se pasa a adimensionalizar las ecuaciones vistas. Para ello, se tomarán las siguientes unidades:

- Unidades de longitud - $(R-e)$
- Unidades de fuerza normal - N_0 es la fuerza normal en el extremo de la viga
- Unidades de rigidez - $(EI)_0$ es la rigidez en el extremo de la viga
- Unidades de masa - m_0 es la masa de la viga en el extremo de la viga
- De fuerzas aplicadas - w_{a1} que corresponde a la fuerza aerodinámica por unidad de longitud en el punto donde ésta es máxima (Distancia adimensional igual a 0,85)

Se adimensionaliza la ecuación de la elástica [6.6] y queda de la siguiente manera:

$$\frac{(EI)_0}{(R-e)^3} \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{EI}{(EI)_0} \frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} \right] - \frac{N_0}{(R-e)} \frac{d}{dx} \left(\frac{N}{N_0} \frac{d \bar{y}}{dx} \right) = w_{a1} \frac{w(x)}{w_{a1}} \quad [6.20]$$

Si se denota de la siguiente manera las siguientes expresiones:

$$\frac{EI}{(EI)_0} = r(x) \quad \frac{N}{N_0} = s(x) \quad \frac{w(x)}{w_{a1}} = t(x) \quad [6.21]$$

Se sustituyen en la ecuación [6.20] y resulta:

$$\frac{(EI)_0}{(R-e)^3} \frac{d^2}{dx^2} \left[r(x) \frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} \right] - \frac{N_0}{(R-e)} \frac{d}{dx} \left(s(x) \frac{d \bar{y}}{dx} \right) = w_{a1} t(x)$$

Sacando factor común a $(EI)_0$ y $(R-e)^3$ se obtiene:



$$\frac{d^2}{dx^2} \left[r(x) \frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} \right] - \frac{N_0 (R-e)^2}{(EI)_0} \frac{d}{dx} \left(s(x) \frac{d \bar{y}}{dx} \right) = \frac{w_{al} (R-e)^3}{(EI)_0} t(x) \quad [6.22]$$

Llamando:

$$E_1 = \frac{N_0 (R-e)^2}{(EI)_0} \quad E_2 = \frac{w_{al} (R-e)^3}{(EI)_0} \quad [6.23]$$

Se llega a:

$$\boxed{\frac{d^2}{dx^2} \left[r(x) \frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} \right] - E_1 \frac{d}{dx} \left(s(x) \frac{d \bar{y}}{dx} \right) = E_2 t(x)} \quad [6.24]$$

A continuación se determinan los valores de las constantes E_1 y E_2 :

- Cálculo de E_1

A partir del valor de N_0 , usando la ecuación [6.9] se puede obtener, resultando:

$$N_0 = \int_0^{R-e} m \Omega^2 (r_1 + e) dr_1 = m_0 \Omega^2 (R-e)^2 \int_0^1 \left(\frac{m}{m_o} \right) (x + \bar{e}) dx \quad [6.25]$$

Se despeja [6.25] en la ecuación de E_1 , [6.23]:

$$E_1 = \frac{m_0 (R-e)^4 \Omega^2}{(EI)_0} \int_0^1 \left(\frac{m}{m_o} \right) (x + \bar{e}) dx \quad [6.26]$$

Si ω_0 es una frecuencia estructural característica de la viga que sigue la siguiente expresión:



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(EI)_0}{m_0(R-e)^4}} \quad [6.27]$$

Al despejarlo en [6.26] se obtiene la siguiente expresión:

$$E_1 = \left(\frac{\Omega}{\omega_0} \right)^2 \int_0^1 \left(\frac{m}{m_0} \right) (x + \bar{e}) dx \quad [6.28]$$

- *Cálculo de E_2*

Para el cálculo de E_2 es preciso utilizar el valor de la tracción por pala, esto es, el peso que debe soportar cada pala del helicóptero, siendo T la masa total del helicóptero y b el número de palas. Dicha tracción por pala resultará de integrar la fuerza aerodinámica a lo largo de toda la longitud de la pala:

$$\frac{T}{b} = \int_0^{R-e} w_a dr \quad [6.29]$$

Se adimensionaliza la ecuación y queda:

$$\frac{T}{b} = w_{a1}(R-e) \int_0^1 \frac{w_a}{w_{a1}} dx \quad [6.30]$$

Se sustituye esta expresión en [6.23] y queda:

$$E_2 = \frac{\frac{\frac{T}{b}}{(R-e) \int_0^1 \frac{w_a}{w_{a1}} dx} (R-e)^3}{(EI)_0} = \frac{\frac{T}{b}}{(R-e)^2 m_0 \omega_0^2} \frac{1}{\int_0^1 \frac{w_a}{w_{a1}} dx} \quad [6.31]$$

Si ω_1 es otra frecuencia característica que depende de la tracción en la viga:



$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\frac{T}{b}}{m_0(R-e)^2}} \quad [6.32]$$

Sustituyendo esta expresión en [6.31] queda:

$$E_2 = \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \right)^2 \frac{1}{\int_0^1 \frac{w_a}{w_{a1}} dx} \quad [6.33]$$

La función $r(x)$, [6.21], representa la distribución de rigidez a lo largo de la envergadura de la viga. La función $s(x)$, [6.21], se expresa en función de la distribución de masas:

$$s(x) = \frac{N}{N_0} = \frac{\int_0^{R-e} m\Omega^2(R+e)dr}{\int_0^{R-e} m\Omega^2(R+e)dr} \quad [6.34]$$

Se adimensionaliza obteniéndose la siguiente ecuación:

$$s(x) = \frac{\int_0^1 \left(\frac{m}{m_0} \right) (R + \bar{e}) dx}{\int_0^1 \left(\frac{m}{m_0} \right) (R + \bar{e}) dx} \quad [6.35]$$

Para obtener la función $t(x)$ se usa la siguiente expresión:

$$w(r) = w_a(r) - a_0 m \Omega^2 (r + e) \quad [6.36]$$

Se adimensionaliza:



$$w(x) = w_a(x) - a_0 m_0 \Omega^2 (R - e) \left(\frac{m}{m_0} \right) (x + \bar{e}) \quad [6.37]$$

Y resulta:

$$t(x) = \frac{w(x)}{w_{a1}} = \frac{w_a}{w_{a1}} - \frac{a_0 m_0 \Omega^2 (R - e)}{w_{a1}} \left(\frac{m}{m_0} \right) (x + \bar{e}) \quad [6.38]$$

Se despeja en la expresión anterior la expresión [6.30], teniendo que:

$$t(x) = \frac{w_a}{w_{a1}} - \frac{a_0 m_0 \Omega^2 (R - e)}{\frac{T}{b}} \left(\frac{m}{m_0} \right) (x + \bar{e}) \quad [6.39]$$

$$(R - e) \int_0^1 \frac{w_a}{w_{a1}} dx$$

Se usa también la expresión de ω_1 y se obtiene lo siguiente:

$$t(x) = \frac{w_a}{w_{a1}} - a_0 \left(\frac{\Omega}{\omega_1} \right)^2 \int_0^1 \frac{w_a}{w_{a1}} dx \left(\frac{m}{m_0} \right) (x + \bar{e}) \quad [6.40]$$

Llamando:

$$k = a_0 \left(\frac{\Omega}{\omega_1} \right)^2 \int_0^1 \frac{w_a}{w_{a1}} dx \quad [6.41]$$

Se llega a la expresión final para t(x):

$$t(x) = \frac{w_a}{w_{a1}} - k \left(\frac{m}{m_0} \right) (x + \bar{e}) \quad [6.42]$$



- Vigas empotradas: Para la obtención del valor de a_0 se utiliza la condición de giro nulo que se tiene en el extremo, ($x = 0$), de la viga, es decir:

$$\frac{dy}{dr} = 0 \rightarrow \frac{dM}{dr} = -V + N \frac{dy}{dr} \rightarrow \frac{dM}{dr} = -V \quad [6.43]$$

$$M(x) = (R - e)^2 w_{a1} \int_0^1 \frac{w_a}{w_{a1}} x dx - \quad [6.44]$$

$$- a_0 m_0 \Omega^2 (R - e)^3 \int_0^1 \left(\frac{m}{m_0} \right) (x + \bar{e}) x dx$$

$$V(x) = \int_x^1 \frac{w_a}{w_{a1}} - a_0 \left(\frac{\Omega}{\omega_1} \right)^2 \int_x^1 \left[\int_0^1 \frac{w_a}{w_{a1}} \right] \left(\frac{m}{m_0} \right) (x + \bar{e}) dx \quad [6.45]$$

Se sustituyen estas expresiones, [6.44] y [6.45] en la expresión [6.43], y se despeja el valor de a_0 :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} M(x) &= \frac{d}{dx} \left[(R - e)^2 w_{a1} \int_0^1 \frac{w_a}{w_{a1}} x - \right. \\ &\quad \left. - a_0 m_0 \Omega^2 (R - e)^3 \int_0^1 \left(\frac{m}{m_0} \right) (x + \bar{e}) x dx \right] = \quad [6.46] \\ &= - \int_x^1 \frac{w_a}{w_{a1}} dx - a_0 \left(\frac{\Omega}{\omega_1} \right)^2 \int_x^1 \left[\int_0^1 \frac{w_a}{w_{a1}} \right] \left(\frac{m}{m_0} \right) (x + \bar{e}) dx \end{aligned}$$



$$a_0|_{x=0} = \frac{\int_x^1 \frac{w_a}{w_{a1}} dx}{\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 \int_x^1 \int_0^1 \frac{w_a}{w_{a1}} \left(\frac{m}{m_0}\right) (x + \bar{e}) dx} \quad [6.47]$$

- Vigas articuladas: Para vigas articuladas, se deben establecer el equilibrio de momentos entre las fuerzas aerodinámicas y las centrífugas, que quedan de la siguiente manera:

$$\int_0^{R-e} w_a r dr = a_0 \int_0^{R-e} m \Omega^2 (r + e) r dr \quad [6.48]$$

Que adimensionalizada resulta:

$$(R - e)^2 w_{a1} \int_0^1 \frac{w_a}{w_{a1}} x dx = a_0 m_0 \Omega^2 (R - e)^3 \int_0^1 \frac{m}{m_0} (x + \bar{e}) x dx$$

Con lo cual:

$$k = \frac{a_0 m_0 \Omega^2 (R - e)}{w_{a1}} = \frac{\int_0^1 \frac{w_a}{w_{a1}} x dx}{\int_0^1 \frac{m}{m_0} (x + \bar{e}) x dx} \quad [6.49]$$

6.2.5 Solución de la ecuación de la elástica - Método de colocación

Una solución a la ecuación de la elástica podría obtenerse dividiendo la pala en partes Δr en las que se consideran las propiedades constantes y en las que los valores de un elemento podrían obtenerse a partir del elemento anterior. Sin embargo, este proceso necesita de unos valores de arranque que obligan a dejar libre una incógnita, la cual se fija posteriormente cumpliendo las correspondientes condiciones en el extremo de llegada.



Sin embargo, este procedimiento, y otros análogos, tienen el inconveniente de que van acumulando errores, por lo que suelen ser preferibles métodos directos de ajuste de la forma de la elástica mediante una sucesión de funciones $\Psi_i(x)$ que cumplan todas ellas las condiciones de contorno.

De este modo, la elástica queda expresada como un desarrollo en serie de estas funciones:

$$\bar{y}(x) = \sum_1^{\infty} Z_i \Psi_i(x) \quad [6.50]$$

Con este método se divide la viga en “n” intervalos y se determinan los “n” coeficientes Z_i , de manera que satisfaga la ecuación diferencial en los “n” puntos de control. Estos puntos de control no incluyen los extremos.

Se sustituye la ecuación [6.50] en la ecuación de la elástica [6.6] resultando la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} \left(EI \frac{d^2}{dr^2} \left(\sum_1^n Z_i \Psi_i \right) \right) - \frac{d}{dr} \left(N \frac{d}{dr} \left(\sum_1^n Z_i \Psi_i \right) \right) &= \sum_1^{\infty} Z_i X_i(r) = w(r) \\ \sum_1^n Z_i \left[\frac{d^2}{dr^2} \left(EI \frac{d^2}{dr^2} (\Psi_i) \right) - \frac{d}{dr} \left(N \frac{d}{dr} (\Psi_i) \right) \right] &= \sum_1^n Z_i X_i(r) = w(r) \end{aligned} \quad [6.51]$$

Se igualan la ecuación en los “n” puntos de control, r_1, \dots, r_n , obteniendo:

$$\begin{bmatrix} X_1(r_1) & \dots & X_n(r_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ X_1(r_n) & \dots & X_n(r_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w(r_1) \\ \dots \\ w(r_n) \end{bmatrix} \quad [6.52]$$

los coeficientes Z_i y la forma de la elástica.



- Elección de los puntos r_j

Los puntos r_j pueden escogerse:

- Equidistantes:

$$r_j = j \frac{1}{n+1} \quad [6.53]$$

- Condicionada: Ofrecen una mayor densidad de puntos en aquellas zonas que queremos. La siguiente función ofrece más puntos en las zonas donde el momento flector varía más rápidamente:

$$r_j = 3 \left(\frac{j}{n+1} \right)^2 - 2 \left(\frac{j}{n+1} \right)^3 \quad [6.54]$$

- Elección de las funciones $\psi_i(x)$

A continuación se ve una familia de polinomios $\psi_i(x)$ que se pueden utilizar, y que cumple con las condiciones de contorno del problema de la elástica:

$$\Psi_i(x) = x^{i+1} \left(1 - \frac{2i}{(i+2)} x + \frac{i(i+1)}{(i+2)(i+3)} x^2 \right) \quad [6.55]$$

- Condiciones de contorno

- $\Psi_i(0) = 0$; $\Psi_i'(0) = 0$; $\Psi_i''(0) = 0$
- $\Psi_i''(1) = 0$; $\Psi_i'''(1) = 0$



- Derivadas

$$\Psi_i'(x) = (i+1)x^i \left(1 - \frac{2i}{(i+2)}x + \frac{i}{(i+2)}x^2 \right) \quad [6.56]$$

$$\Psi_i''(x) = (i+1)x^{i-1}(1-x)^2 \quad [6.57]$$

$$\Psi_i'''(x) = i(i+1)x^{i-1}[(i-1) - (i+1)x](i-x) \quad [6.58]$$

Aplicando las condiciones:

- $\Psi_i(0) = 0 \Rightarrow i \geq 0$
- $\Psi_i'(0) = 0 \Rightarrow i \geq 1; \Psi_0'(0) = 1$
- $\Psi_i''(0) = 0 \Rightarrow i = 0; i \geq 2; \Psi_1''(0) = 2$
- $\Psi_i''(1) = 0 \Rightarrow i \geq 0$
- $\Psi_i'''(1) = 0 \Rightarrow i \geq 0$

Así que se puede obtener la solución a la ecuación de la elástica resolviendo el sistema de n ecuaciones con n incógnitas que se obtienen al usar la serie de funciones Ψ_i .

Nos aproximamos con un polinomio de grado $n+3$, y la ley de momentos flectores quedará aproximada con un polinomio de grado $n+1$.

Según el tipo de empotramiento que se tengan se tiene:

- Viga empotrada - $Z_0 = 0$
- Viga articulada - $Z_1 = 0$



6.2.6 Leyes de esfuerzos

Para calcular los esfuerzos axiles y cortantes no es necesario haber resuelto la ecuación diferencial de la elástica, ya que son función exclusivamente de las funciones $s(x)$ y $t(x)$ por lo que:

- Esfuerzo Axil

$$\frac{N}{N_0} = s(x)$$

$$N_0 = m_0 \Omega^2 (R - e)^2 \int_0^1 \frac{m}{m_0} (x + \bar{e}) dx$$

$$s(x) = \frac{\int_x^1 \left(\frac{m}{m_0} \right) (R + \bar{e}) dx}{\int_0^1 \left(\frac{m}{m_0} \right) (R + \bar{e}) dx}$$

Entonces:

$$N = N_0 s(x) = m_0 \Omega^2 (R - e)^2 \int_0^1 \frac{m}{m_0} (x + \bar{e}) dx \frac{\int_x^1 \left(\frac{m}{m_0} \right) (R + \bar{e}) dx}{\int_0^1 \left(\frac{m}{m_0} \right) (R + \bar{e}) dx} \quad [6.59]$$



- Esfuerzo Cortante

Si la expresión del esfuerzo cortante es:

$$V = \int_r^{R-e} w(r_1) dr_1 = (R-e) \int_r^{R-e} t(x) w_{a1} dr_1 \quad \text{y} \quad t(x) = \frac{w_a}{w_{a1}} - k \left(\frac{m}{m_0} \right) (x + \bar{e})$$

$$V = (R-e) w_{a1} \int_x^1 \frac{w_a}{w_{a1}} - k \left(\frac{m}{m_0} \right) (x + \bar{e}) dx \quad [6.60]$$

El valor de w_{a1} se obtiene haciendo que la tracción por pala se igual a la suma de las fuerzas aerodinámicas, con lo que:

$$H = \int_0^{R-e} w_a dr = w_{a1} (R-e) \int_0^1 \frac{w_a}{w_{a1}} dx \rightarrow w_{a1} = \frac{H}{(R-e) \int_0^1 \frac{w_a}{w_{a1}} dx} \quad [6.61]$$

Por tanto:

$$V = \frac{H}{\int_0^1 \frac{w_a}{w_{a1}} dx} \int_x^1 \frac{w_a}{w_{a1}} - k \left(\frac{m}{m_0} \right) (x + \bar{e}) dx \quad [6.62]$$

Con:

$$k = a_0 \left(\frac{\Omega}{\omega_1} \right)^2 \int_0^1 \frac{w_a}{w_{a1}} dx$$



Como se vio anteriormente el coeficiente k depende del tipo de unión de la pala al cubo del rotor. Distinguiendo entre pala empotrada y articulada, la expresión final del esfuerzo cortante queda:

Pala articulada

$$V = \frac{H}{\int_0^1 \frac{w_a}{w_{a1}} dx} \int_x^1 \frac{w_a}{w_{a1}} dx - \frac{\int_0^1 \frac{w_a}{w_{a1}} x dx}{\int_0^1 \frac{m}{m_0} (x + \bar{e}) x dx} \left(\frac{m}{m_0} \right) (x + \bar{e}) dx \quad [6.63]$$

Pala empotrada

$$V = \frac{H}{\int_0^1 \frac{w_a}{w_{a1}} dx} \int_x^1 \left[\frac{w_a}{w_{a1}} - a_o \left(\frac{\Omega}{\omega_1} \right)^2 \left(\int_0^1 \frac{w_a}{w_{a1}} dx \right) \left(\frac{m}{m_0} \right) (x + \bar{e}) \right] dx \quad [6.64]$$

Siendo:

$$a_o \Big|_{x=0} = \frac{\int_x^1 \frac{w_a}{w_{a1}} dx}{\left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \int_x^1 \left[\int_0^1 \frac{w_a}{w_{a1}} dx \right] \left(\frac{m}{m_0} \right) (x + \bar{e}) dx} \Big|_{x=0}$$

Para calcular el momento flector ya si es necesario haber resuelto la ecuación de la elástica por el método de colocación ya que es función del desplazamiento y , de esta forma queda:

- Momento flector

$$M = EI(r) \frac{d^2 y}{dr^2} = \frac{EI(x)}{(R-e)} \frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} \quad [6.65]$$

6.2.7 Resolución de paredes delgadas de material compuesto

Para el cálculo de las tensiones y las deformaciones se van a utilizar de nuevo la teoría de paredes delgadas de material compuesto. A continuación se detalla el proceso para la determinación de las mismas.

En primer lugar hay que tener en cuenta que en vigas isotrópicas de pared delgada cuando están sujetas a cargas axiales y momentos flectores en el plano x-z solo aparecen σ_x . Sin embargo, en las vigas de material compuesto de pared delgada sujetas a estas cargas también aparecen tensiones normales σ_ξ , normal transversal σ_η y tensiones tangenciales $\tau_{\xi\eta}$ (figura 6.3). Esto se explica como sigue a continuación.

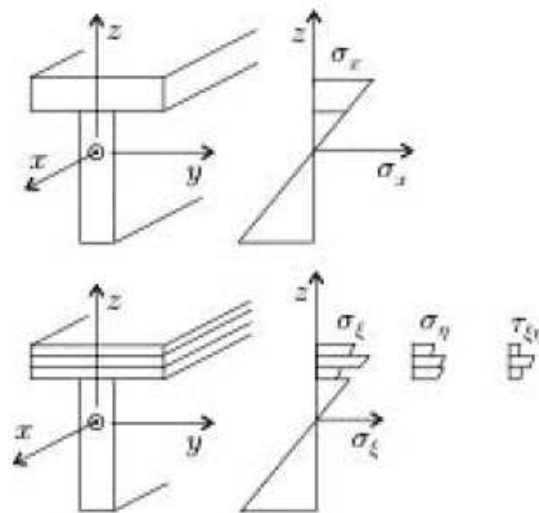


Figura 6.3 – Tensiones en una material isotrópico y otro que no lo es aplicadas por un momento en el plano x-z

Para aclarar cuales son los ejes globales de la sección y los ejes globales de la pared se muestra la figura 6.4 seguidamente:

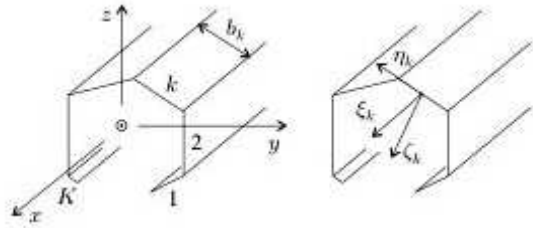


Figura 6.4 – Sistemas de coordenadas en sección de pared delgada

En un laminado de una arbitraria pared de la sección y simétrica respecto el eje z donde se aplican las cargas en el plano x-z las deformaciones en ejes globales de la sección que se producen son:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{N}{EA} \quad [6.66]$$

$$\frac{1}{\rho_y} = \frac{M}{EI_{yy}} \quad [6.67]$$

$$\frac{1}{\rho_z} = 0 \quad [6.68]$$

Donde ε_x^0 es la deformación según el eje global x, $1/\rho_y$ es la curvatura según el eje "y" y $1/\rho_z$ es la curvatura según el eje z.

EA y EI_{yy} son las rigideces calculadas en el capítulo 5 siguiendo la teoría de pared delgada de materiales compuestos.

Por tanto, para calcular las deformaciones en ejes globales de la pared en cada una de las láminas del laminado se debe aplicar:

$$\varepsilon_\xi^0 = \varepsilon_x^0 + z \frac{1}{\rho_y} \quad [6.69]$$

$$\kappa_\xi = \frac{1}{\rho_y} \cos \alpha \quad [6.70]$$



Obteniéndose así dos de las deformaciones necesarias para después calcular las tensiones. Con estas tensiones determinadas se puede calcular las fuerzas y momentos en ejes locales para cada lámina mediante la matriz que relaciona las deformaciones y los esfuerzos.

De esta manera la fuerza N_ξ y el momento M_ξ (por unidad de longitud) en la pared son:

$$N_\xi = \frac{1}{a_{11}} \varepsilon_\xi^0 \quad [6.71]$$

$$M_\xi = \frac{1}{d_{11}} \kappa_\xi \quad [6.72]$$

Que sustituyendo las ecuaciones [6.66], [6.67], [6.69] y [6.70] en estas se obtiene:

$$N_\xi = \frac{1}{\rho_y} z \frac{1}{a_{11}} + \frac{N}{EA} \frac{1}{a_{11}} \quad [6.73]$$

$$M_\xi = \frac{1}{\rho_y} \cos \alpha \frac{1}{d_{11}} \quad [6.74]$$

Con lo que para un laminado simétrico y ortotrópico se pueden calcular las demás componentes de deformación en cada lámina. Escrito en forma matricial se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_\xi^0 \\ \varepsilon_\eta^0 \\ \gamma_{\xi\eta}^0 \\ \kappa_\xi \\ \kappa_\eta \\ \kappa_{\xi\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{12} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & d_{11} \\ 0 & d_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_\xi \\ M_\xi \end{Bmatrix} \quad [6.75]$$



Aplicando la teoría de clásica de laminados se puede obtener las expresiones para las deformaciones totales en cada dirección en ejes globales de la pared para cada tramo:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{\xi} \\ \varepsilon_{\eta} \\ \gamma_{\xi\eta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\xi}^0 \\ \varepsilon_{\eta}^0 \\ \gamma_{\xi\eta}^0 \end{Bmatrix} + \zeta \begin{Bmatrix} \kappa_{\xi} \\ \kappa_{\eta} \\ \kappa_{\xi\eta} \end{Bmatrix} \quad [6.76]$$

Ahora ya se pueden hallar las tensiones en cada uno de los ejes globales del siguiente modo:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\xi} \\ \sigma_{\eta} \\ \tau_{\xi\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\xi} \\ \varepsilon_{\eta} \\ \gamma_{\xi\eta} \end{Bmatrix} \quad [6.77]$$

Por último, para pasar las tensiones a ejes locales se utiliza la matriz de transformación:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_{\xi} \\ \sigma_{\eta} \\ \tau_{\xi\eta} \end{Bmatrix} \quad [6.78]$$

Recapitado, los pasos a seguir para el cálculo de las tensiones en ejes locales de la lámina son:

1. Cálculo de las deformaciones en ejes globales de la sección
2. Cálculo de las deformaciones de cada lámina en ejes globales de la pared
3. Cálculo de esfuerzos por unidad de longitud de cada lámina en ejes globales de la pared
4. Cálculo del resto de deformaciones de cada lámina en ejes globales de la pared
5. Cálculo de deformaciones totales en cada punto de la lámina en ejes globales de la sección
6. Cálculo de las tensiones en ejes globales de la pared
7. Cálculo de las tensiones en ejes locales de la pared



6.2.8 Criterio de rotura

Para comprobar que cada lamina cumple con los requerimientos estructurales se debe aplicar el criterio de rotura a cada lámina. En el presente texto se utilizará el criterio de rotura de Tsai-Hill que tiene la siguiente expresión:

$$\left(\frac{\sigma_1}{X_t/CS}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y_t/CS}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{xy}}{S_{xy}/CS}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{\left(X_t/CS\right)^2} = TH \Rightarrow CS = \sqrt{\frac{1}{TH}}$$

De esta manera si el valor del coeficiente de seguridad es mayor o igual a la unidad no rompe la lámina, mientras que si dicho valor es inferior a uno la lámina en cuestión rompe.

6.3 RESULTADOS

Una vez expuesta toda la teoría relativa al cálculo estructural de una pala de helicóptero en flexión y al cálculo de tensiones en secciones de pared delgada de materiales compuestos, es momento de aplicarlo al helicóptero cuyos parámetros fueron definidos en el capítulo 4.

En primer lugar, quedaron definidos todos los parámetros de partida de los que consta la pala que se está diseñando. Con estos valores, se puede llegar a obtener los esfuerzos que soporta la pala, es decir, el axil, el cortante y el momento flector. Para calcular los esfuerzos es necesario resolver en primera instancia la ecuación de la elástica. Para ello, se utilizará el método de colocación entre varias opciones posibles. A partir de aquí se podrán hallar las deformaciones que sufre cada una de las secciones de la pala y de esta manera calcular las tensiones en ejes globales para posteriormente determinar las tensiones en ejes locales y así poder aplicar el criterio de rotura seleccionado.

Con el fin de agilizar el proceso de cálculo y poder comparar con mayor facilidad los resultados obtenidos, se ha desarrollado un programa en entorno Matlab. Mediante la utilización de dicho programa se puede obtener de manera automática todo el proceso de cálculo integrodiferencial, se puede determinar las matrices de rigidez de los laminados, así como la obtención de los esfuerzos, deformaciones y tensiones que sufre cada una de las secciones de la pala. Además permite aplicar el criterio de rotura a cada sección, por lo que de esta manera queda estudiada la integridad estructural de la pala.

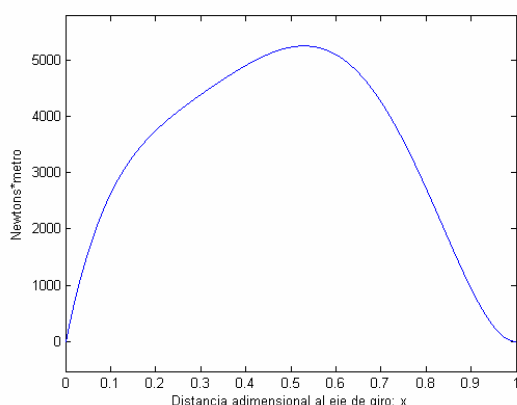


6.3.1 Selección de los puntos de colocación

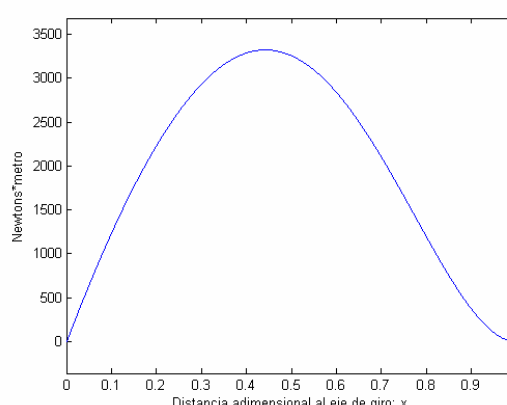
Una de las primeras decisiones que hay que tomar a la hora de ejecutar el programa es determinar el número de puntos de colocación que se van a utilizar. Como se explico anteriormente el programa permite resolver el problema tomando una serie de puntos equiespaciados o no equiespaciados, es decir, escogiendo una mayor densidad de puntos donde el momento flector varía más rápidamente.

Las premisas para la determinación del número de puntos es por un lado que sean los necesarios para que la solución final sea la más exacta posible y por otro que no sean excesivos para no exigir demasiado coste computacional. Cabe recordar que si eligen n puntos de control, la ecuación de la elástica queda ajustada a un polinomio de grado $n+3$ y por tanto la ley de momentos flectores será de $n+1$. Por lo que obtenerlas de la manera mas simplificada posible facilitará el tratamiento de las mismas.

Para la selección se va a realizar una comparativa entre las distintas soluciones que ofrecen cada uno de los métodos, es decir, equiespaciados o no, calculándose para distintos números de puntos de colocación. Para ellos, a continuación se muestran el diagrama de momentos flectores para los distintos casos:



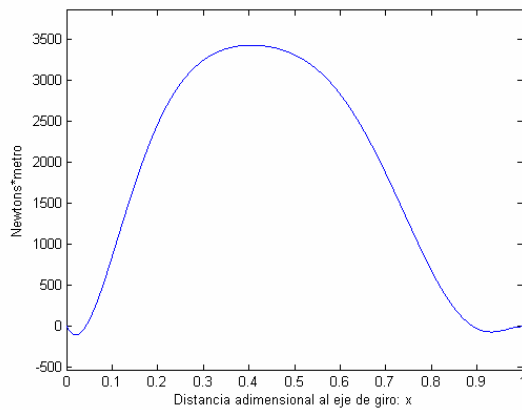
a)



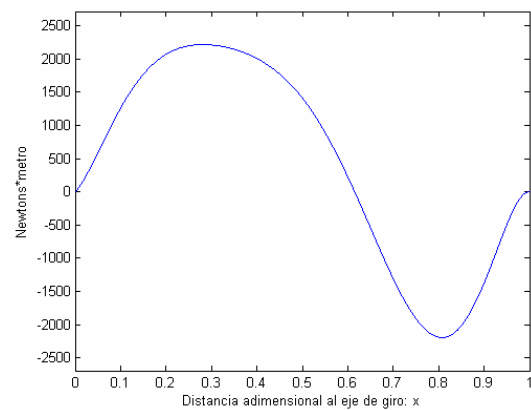
b)

6.5 – Diagrama de momento flector para 4 puntos de colocación

- a) 4 puntos equiespaciados
- b) 4 puntos no equiespaciados



a)



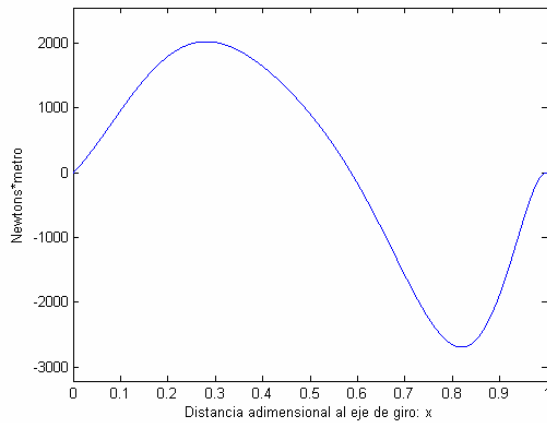
b)

6.6 – Diagrama de momento flector para 6 puntos de colocación

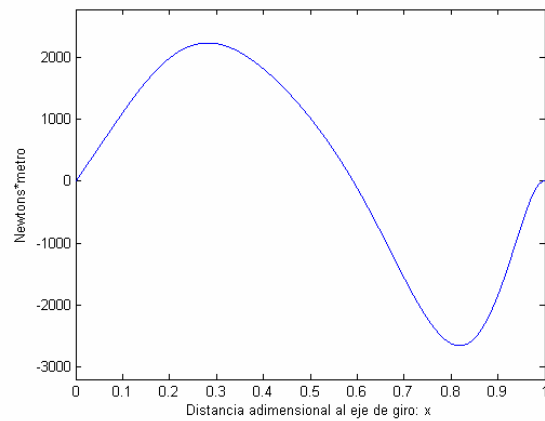
a) 6 puntos equiespaciados

b) 6 puntos no equiespaciados

Como se puede observar en estos primeros diagramas la precisión en el cálculo del momento flector es mayor al aumentar el número de puntos de colocación. La exactitud tanto del valor máximo del momento flector como de la distancia adimensional varía rápidamente con escasos número de puntos. Además, también se aprecia que cuando la distribución de puntos no es equiespaciada se llega más rápidamente a la solución correcta. Esto queda demostrado al ver como por una parte los valores de momento flector y distancia adimensional convergen de manera más rápido y por otra, como cambia la forma del diagrama acercándose a la solución que intuitivamente es predecible al tener una carga aerodinámica simulada mediante un estudio en el túnel del viento. Más adelante, cuando quede elegido el número de puntos de colocación y se entre con detenimiento en los resultados se comparará entre las soluciones que proporcionan la carga aerodinámica simulada con un estudio en túnel del viento o con la función x^2 .



a)

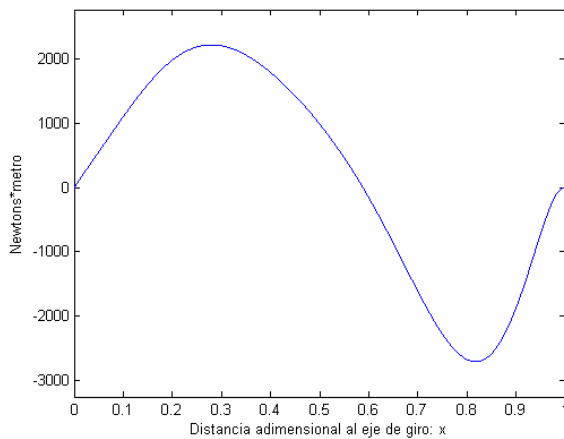


b)

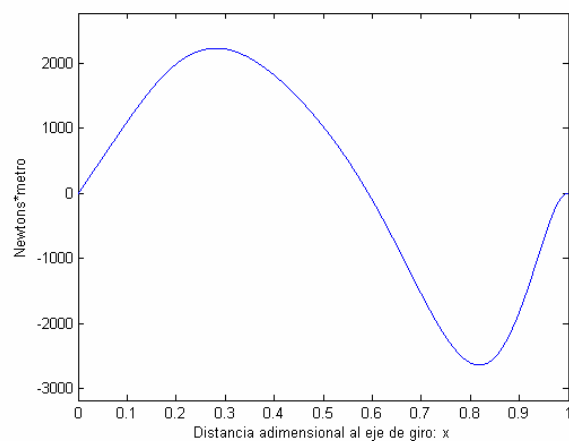
6.7 – Diagrama de momento flector para 8 puntos de colocación

a) 8 puntos equiespaciados

b) 8 puntos no equiespaciados



a)

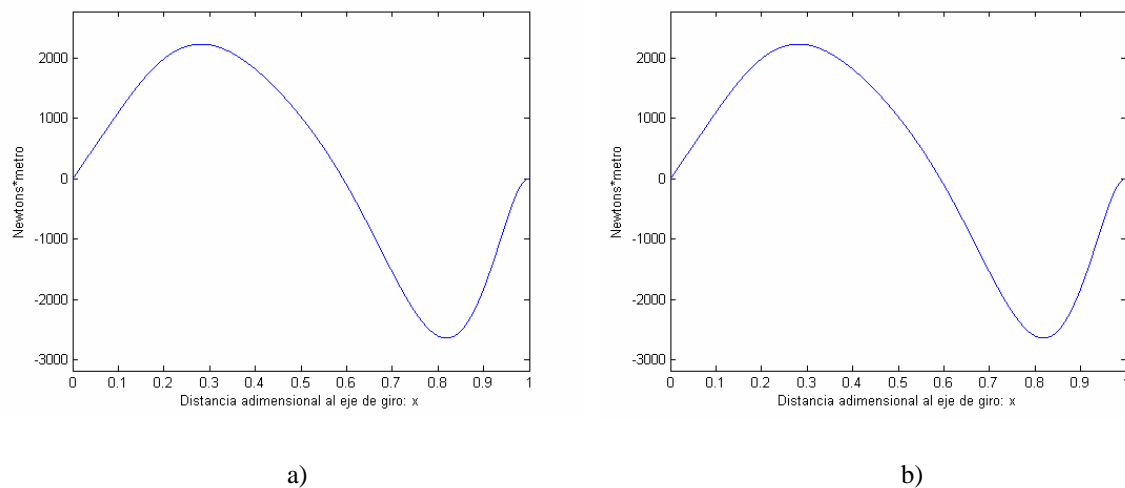


b)

6.8 – Diagrama de momento flector para 10 puntos de colocación

a) 10 puntos equiespaciados

b) 10 puntos no equiespaciados



6.9 – Diagrama de momento flector para 12 puntos de colocación

a) 12 puntos equiespaciados

b) 12 puntos no equiespaciados

A continuación se muestra un gráfico con el valor máximo del momento flector en función del número de puntos de colocación:

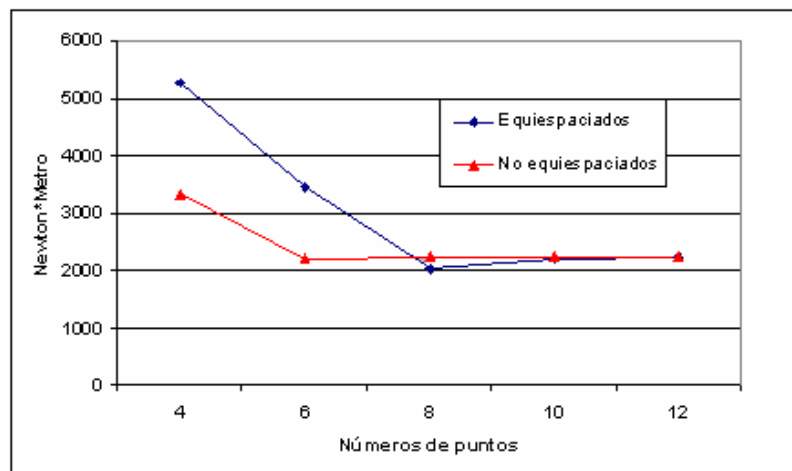


Figura 6.10 – Momento flector en función del número de puntos de colocación

Como se comprueba al ver la figura 6.9 converge más rápidamente el valor del momento flector máximo al seleccionar una disposición no equiespaciada. Para la distribución equiespaciada el valor converge para 8 puntos de colocación mientras que para la distribución no equiespaciada se llega a la solución correcta con 6 puntos de colocación. De igual manera que se ha realizado con el valor máximo del momento flector, se va a construir un gráfico con el valor de la distancia adimensional donde el momento flector es máximo.

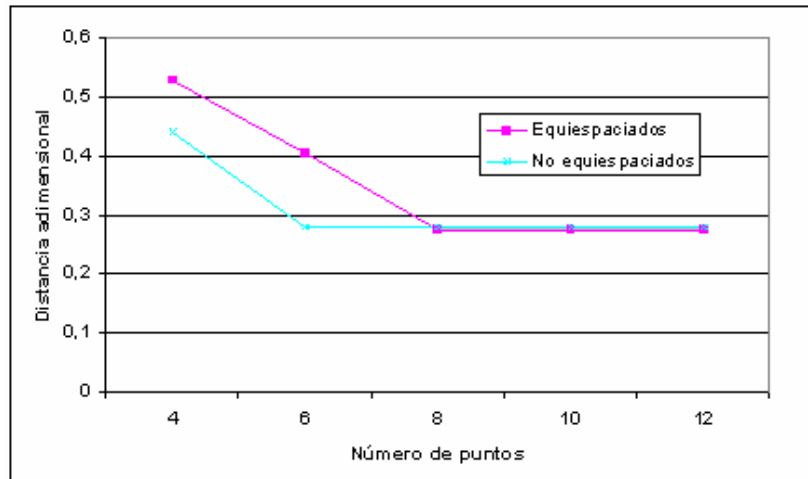


Figura 6.11 – Distancia adimensional donde se produce el valor máximo del momento flector en función del número de puntos de colocación

Con la figura 6.10 se llegan a las mismas conclusiones que con la figura 6.9. A la distribución no equiespaciada le es necesario menos puntos de colocación ya que utiliza 6 para que la solución converja mientras que a la distribución equiespaciada le hace falta 8 puntos de colocación.

Con estos datos ya se pueden sentar las bases para realizar el estudio del cálculo estático. Se tomará una distribución no equiespaciada y 6 puntos de colocación quedando así un polinomio de grado 9 la ecuación de la elástica y de grado 7 la ley de momento flector.

6.3.2 Solución de la elástica

La familia de polinomios obtenida para el ajuste de la elástica y definida según [6.55] es:

$$\psi_0 = x$$

$$\psi_1 = x^2 \left(1 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}x^2 \right)$$

$$\psi_2 = x^3 \left(1 - x + \frac{3}{10}x^2 \right)$$

$$\psi_3 = x^4 \left(1 - \frac{6}{5}x + \frac{2}{5}x^2 \right)$$

$$\psi_4 = x^5 \left(1 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{21}x^2 \right)$$



$$\psi_5 = x^6 \left(1 - \frac{10}{7}x + \frac{15}{28}x^2 \right)$$

$$\psi_6 = x^7 \left(1 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{12}x^2 \right)$$

Debido a que se trata de una pala articulada el coeficiente $A_1 = 0$.

Los puntos de control siguiendo una distribución no equiespaciada según [6.54] son:

$$x_1 = 0.0554$$

$$x_2 = 0.1983$$

$$x_3 = 0.3936$$

$$x_4 = 0.6064$$

$$x_5 = 0.8017$$

$$x_6 = 0.9446$$

Recordando la expresión de la ecuación diferencial de la elástica:

$$\boxed{\frac{d^2}{dx^2} \left[r(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right] - E_1 \frac{d}{dx} \left(s(x) \frac{dy}{dx} \right) = E_2 t(x)}$$

A continuación se pasa a calcular cada uno de sus factores:

$$r(x) = \frac{EI}{EI_0} = \frac{3230.04 \cdot x + 2.1535 \cdot 10^4}{2.1535 \cdot 10^4} = 0.15x + 1$$

$$s(x) = \frac{N}{N_0} = 0.02 \cdot (1 - x^3) + 1.97 \cdot (1 - x^2) + 0.19 \cdot (1 - x)$$

$$t(x) = \frac{w(x)}{w_{a1}} = -135.26x^6 + 355.26x^5 - 351.06x^4 + 160.33x^3 - 31.82x^2 + 2.58x - 0.17$$

$$E_1 = \left(\frac{\Omega}{\omega_0} \right)^2 \int_0^1 \left(\frac{m}{m_0} \right) (x + \bar{e}) dx = 144.04$$



$$E_2 = \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \right)^2 \frac{1}{\int_0^1 \frac{w_a}{w_{a1}} dx} = 5737.05$$

El método de colocación se basa en satisfacer la siguiente ecuación para todos los puntos de colocación elegidos:

$$\sum_0^6 Z_i X_i(x) = w(x)$$

Donde:

$$X_i(x) = \frac{d^2}{dx^2} \left[r(x) \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \right] - E_1 \frac{d}{dx} \left(s(x) \frac{d \phi_i}{dx} \right)$$

$$w(x) = E_2 t(x)$$

Obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} X_1(r_1) & \dots & X_n(r_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ X_1(r_n) & \dots & X_n(r_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w(r_1) \\ \vdots \\ w(r_n) \end{bmatrix}$$

Entonces resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene que:

Z_0	-0.0564
Z_1	0
Z_2	0.2177
Z_3	1.8452
Z_4	-6.1639
Z_5	9.2370
Z_6	-5.4483



Se puede observar que el coeficiente $Z_1 = 0$ por ser una viga articulada. Una vez calculados estos coeficientes está inmediatamente determinada la ecuación de la elástica, por lo que haciendo:

$$\bar{y}(x) = \sum_1^{\infty} Z_i \Psi_i(x)$$

Elástica

$$\bar{y}(x) = -3.18x^9 + 13.12x^8 - 21.58x^7 + 18.19x^6 - 8.31x^5 + 1.63x^4 + 0.22x^3 - 0.056x$$

Y su representación puede verse a continuación:

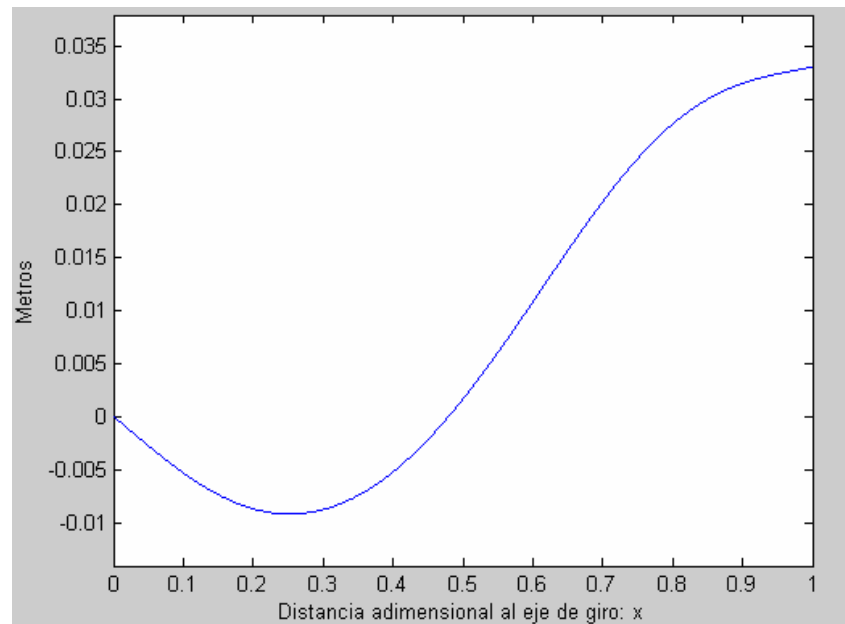


Figura 6.12 – Gráfica de la elástica

Su desplazamiento máximo positivo es 0.033 m. para 7.64 m y el máximo negativo es 0.009 m. para 1.92 m.

Esfuerzo axil

La ecuación que determina la variación del esfuerzo axil a lo largo de la envergadura de la pala viene dada según:



$$N = N_0 s(x) = 46862.2(-0.006(1-x^3) + 0.57(1-x^2) + 0.43(1-x))$$

Que representada queda de la siguiente manera:

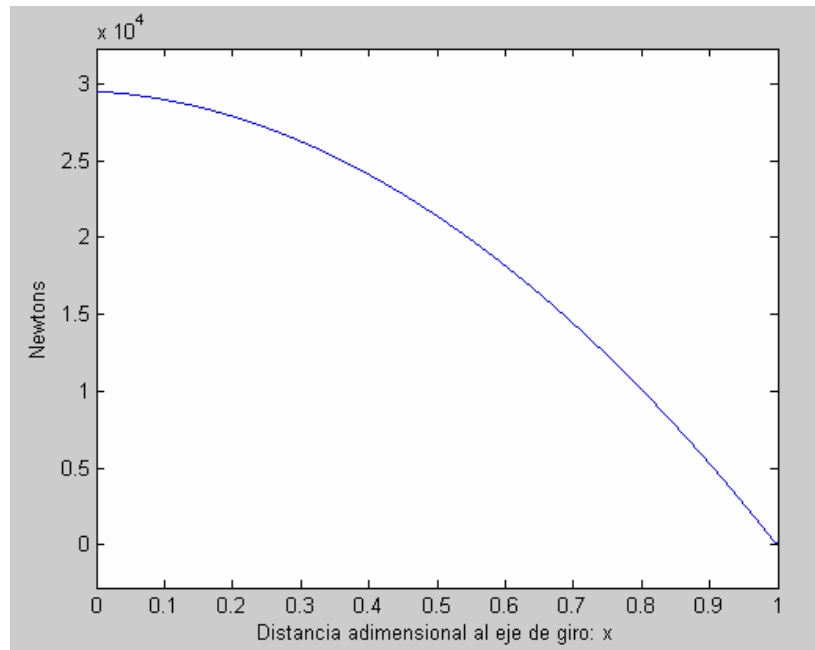


Figura 6.13 – Esfuerzo axil

El valor máximo de l esfuerzo axil se da en la raíz de la pala y es igual a 29.52 KN.

Esfuerzo cortante

El valor del esfuerzo cortante viene dado según:

$$V = \frac{H}{\int_0^1 \frac{w_a}{w_{a1}} dx} \int_0^1 t(x) dx$$

$$V(x) = 145297.6(19.3x^7 - 59.21x^6 + 70.2x^5 - 40.1x^4 + 10.6x^3 - 1.2x^2 + 0.0025x + 19.1)$$

Y su representación:

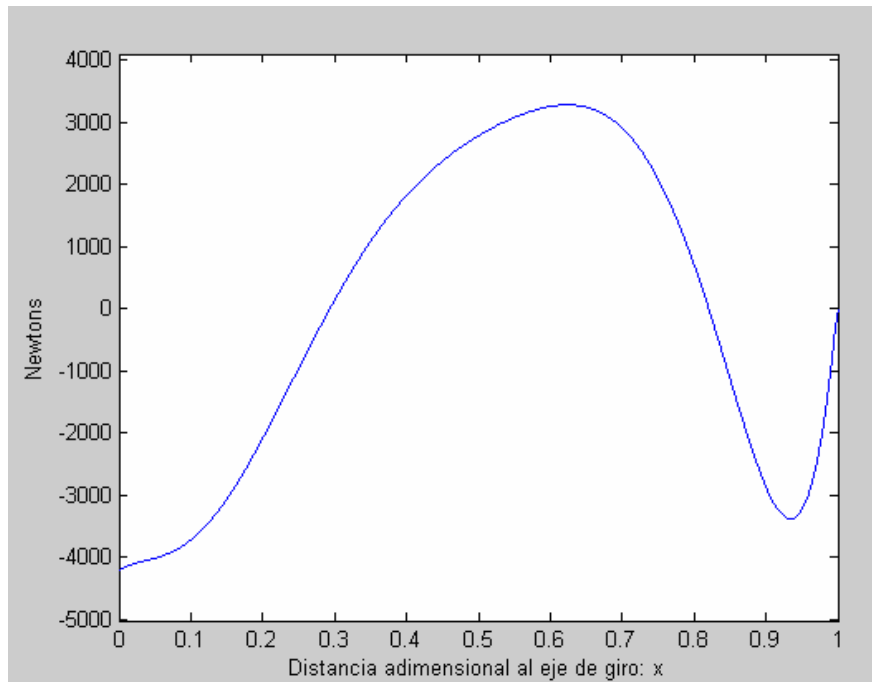


Figura 6.14 – Esfuerzo cortante

Se puede observar en la figura un máximo de 4180N en la sección correspondiente a 0 m. Se debe resaltar el cambio de signo que sufre el esfuerzo cortante en las cercanías a la punta de la pala. Esto es debido a que en esta zona la carga aerodinámica se reduce fuertemente, llegando incluso a ser menor que la fuerza de inercia, con lo que la resultante del esfuerzo cambia de signo.

Momento flector

Para hallar la ley de momentos flectores es necesario tener determinada la curva de la elástica, de manera que:

$$M(x) = \frac{EI(x)}{(R-e)} \frac{d^2 \bar{y}}{dx^2}$$

$$M(x) = (-444.9x + 6184)(-228.8x^7 + 734.7x^6 - 906.3x^5 + 545.8x^4 - 166.3x^3 + 19.5x^2 + 1.3x)$$

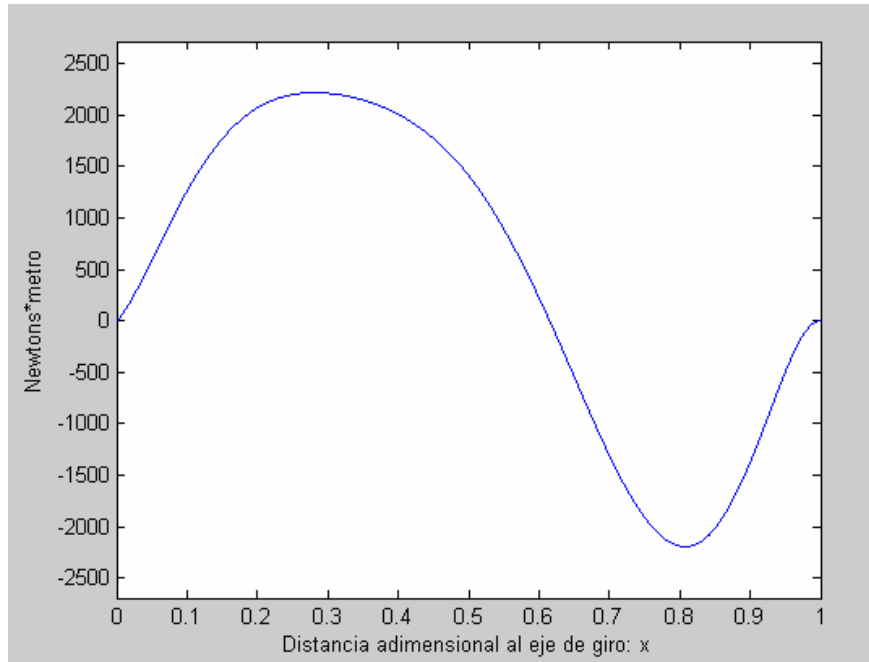


Figura 6.15 – Momento flector

El momento máximo que sufren las secciones de la pala es 2213 Nm. en 2 m. También se observa un cambio de signo del momento flector, debido a que en las proximidades de la punta de la pala la sustentación se reduce fuertemente con lo que la resultante entre la fuerza de inercia y la aerodinámica cambia de signo provocando así el cambio de signo en el momento flector.

Comprobación de la resistencia

Una vez obtenidas todas las tensiones a las que se ven sometidos los laminados, se puede realizar la comprobación de las resistencias. Para ello, se aplica el criterio de rotura de Tsai-Hill que viene dado según:

$$\left(\frac{\sigma_1}{X_t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y_t}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{xy}}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X_t^2} \leq 1$$

Los pasos serán determinar las tensiones a las que está sometida cada lámina en sus ejes locales e introducirla en la ecuación, de manera que si se cumple la desigualdad se asegurará que la lámina no rompe. Además es posible definir un coeficiente de seguridad según:

$$\left(\frac{\sigma_1}{X_t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y_t}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{xy}}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X_t^2} = TH$$



$$CS = \sqrt{\frac{1}{TH}}$$

Aplicando todo esto a cada lámina se puede comprobar como ninguna de las láminas rompe y además trabajan con los siguientes coeficientes de seguridad:

Lámina	Coefficiente de seguridad
0°	4.32
90°	1.32
45°	1.84
-45°	1.84

Tabla 6.1 – Coeficientes de seguridad

6.3.3 Comparación entre distribución de carga aerodinámica

En este apartado se va a realizar una comparativa entre los resultados que se obtienen al utilizar una carga aerodinámica simulada mediante un ensayo en el túnel de viento y una distribución de carga como recomienda la bibliografía utilizada hasta ahora.

Carga 1: La bibliografía empleada (J.L. López Ruíz, 1993) establece que la carga aerodinámica adimensionalizada tiene su valor máximo en la punta de la pala y tiene la siguiente expresión:

$$\frac{w_a}{w_{\max}} = x^2$$

Carga 2: Calculada a partir de ensayos en túnel de viento (ver capítulo 4) y adimensionalizado con su valor máximo. Varía según:

$$\frac{w_a}{w_{\max}} = -135.26x^6 + 355.26x^5 - 351.06x^4 + 160.33x^3 - 31.82x^2 + 5.5883x - 0.0025$$

En la siguiente figura se muestran las diferencias entre ambas distribuciones de carga aerodinámica:

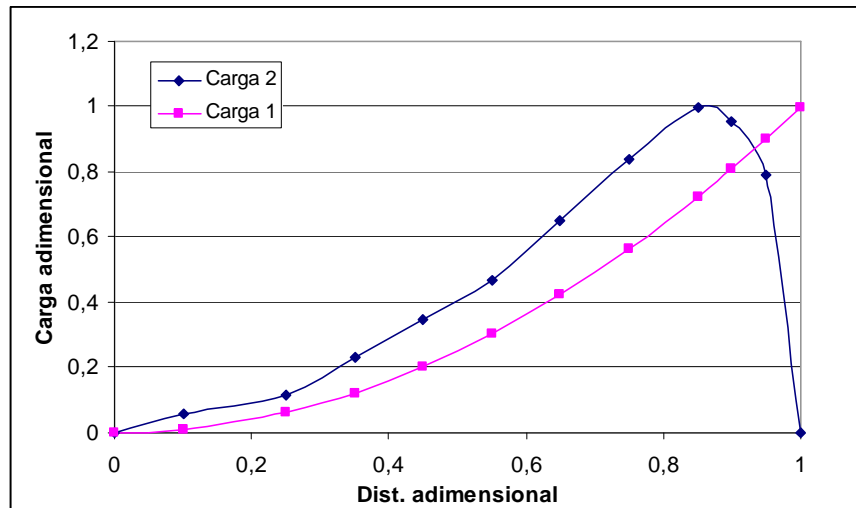


Figura 6.16 – Distribuciones de carga aerodinámica

Cabe mencionar que el número de sublaminaos necesarios para que soporte la carga 1 son 2 y para la carga 2 es 1.

A continuación se van a mostrar las gráficas más representativas que resuelven el problema para el cálculo estático de una pala de helicóptero para las distintas distribuciones de carga. En primer lugar se expondrá las gráficas relativas a la elástica.

Elástica

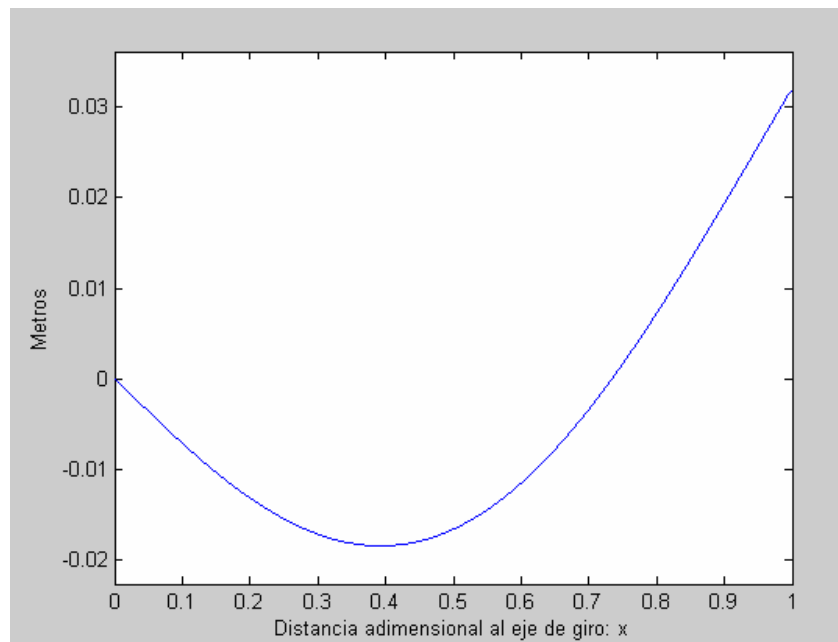


Figura 6.17 – Elástica para la carga 1

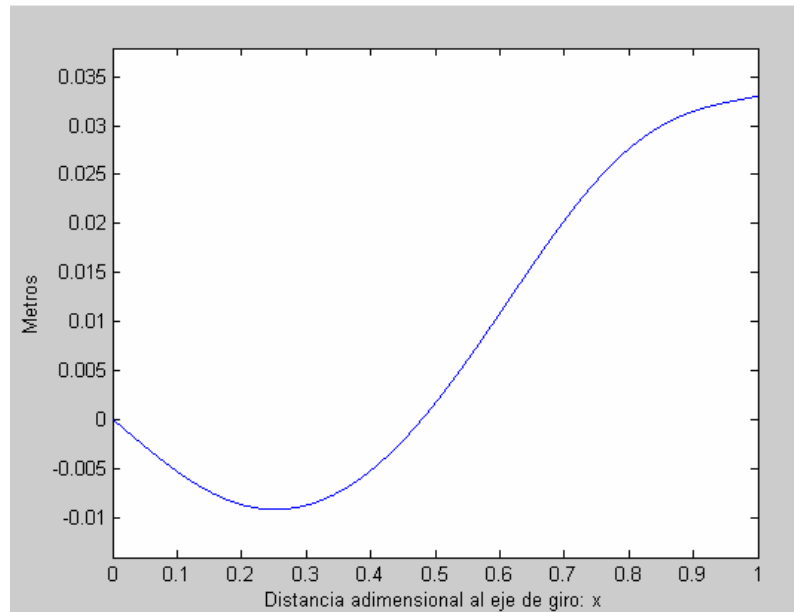


Figura 6.18 – Elástica para la carga 2

Se observa que la diferencia entre ambas elásticas es considerable. La carga 1 proporciona mayores deformaciones que la carga 2. La distribución aerodinámica simulada mediante el túnel de viento crea menor sustentación en la punta de la pala, llega a un valor máximo en un punto de la envergadura de la pala y decrece hasta cero en la punta. Esto hace que las deformaciones a partir de ese punto caigan. Sin embargo, en la función x^2 al crecer la carga aplicada en la pala a lo largo de toda la envergadura la deformación aumenta desde la articulación hasta el extremo libre.

Esfuerzo axil

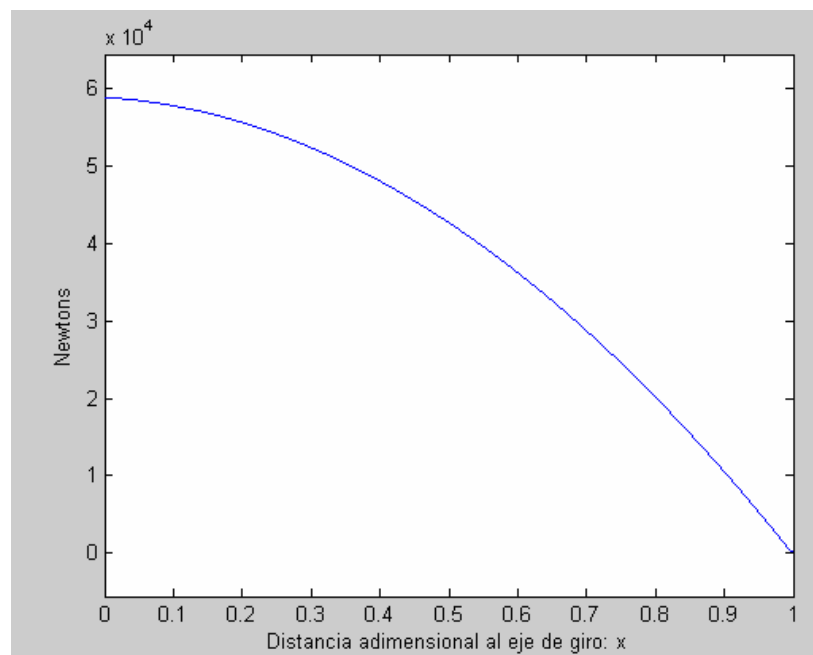


Figura 6.19 – Esfuerzo axil para la carga 1

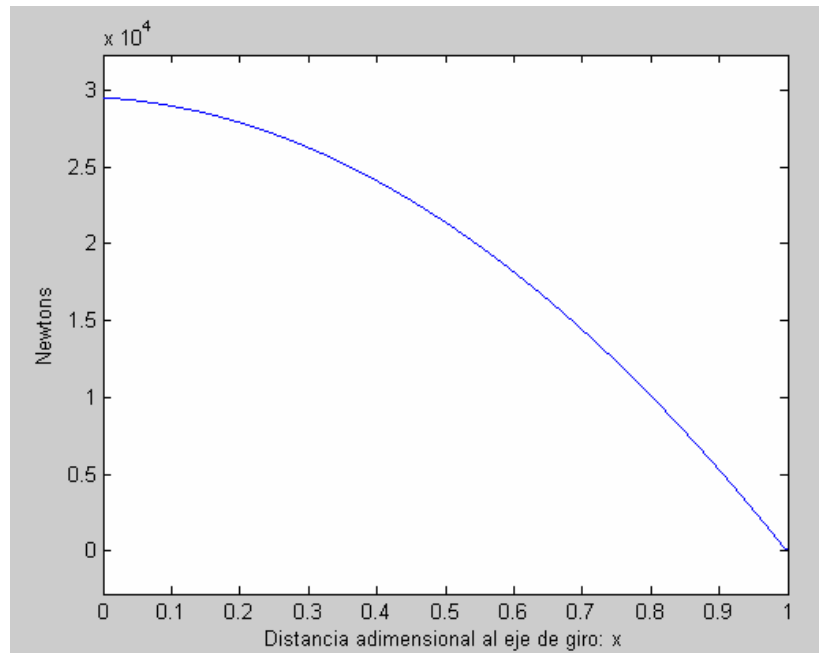


Figura 6.20 – Esfuerzo axial para la carga 2

Se demuestra que el esfuerzo axial, al depender únicamente de la velocidad de giro de la pala y de la distribución de masas a lo largo de la envergadura de ésta, es iguales en ambos casos de carga.

Esfuerzo cortante

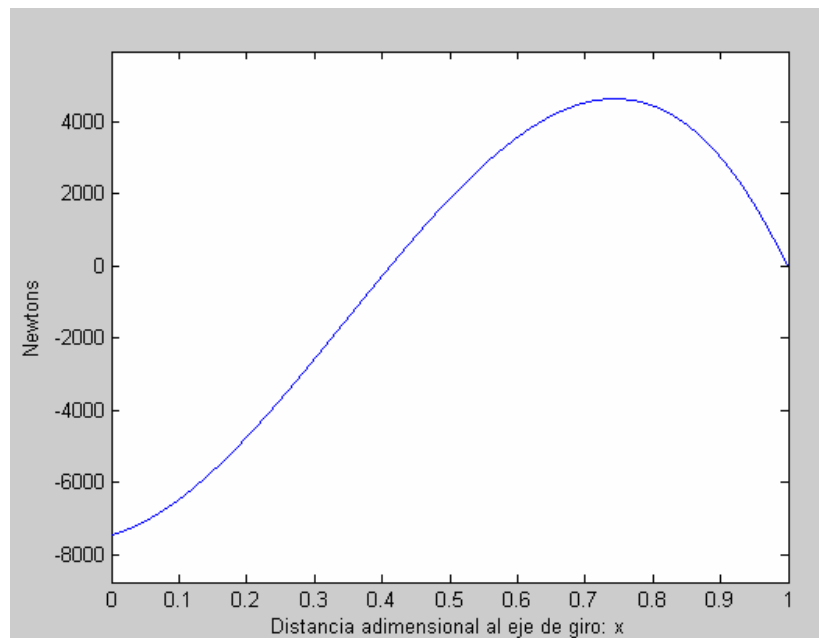


Figura 6.21 – Esfuerzo cortante para la carga 1

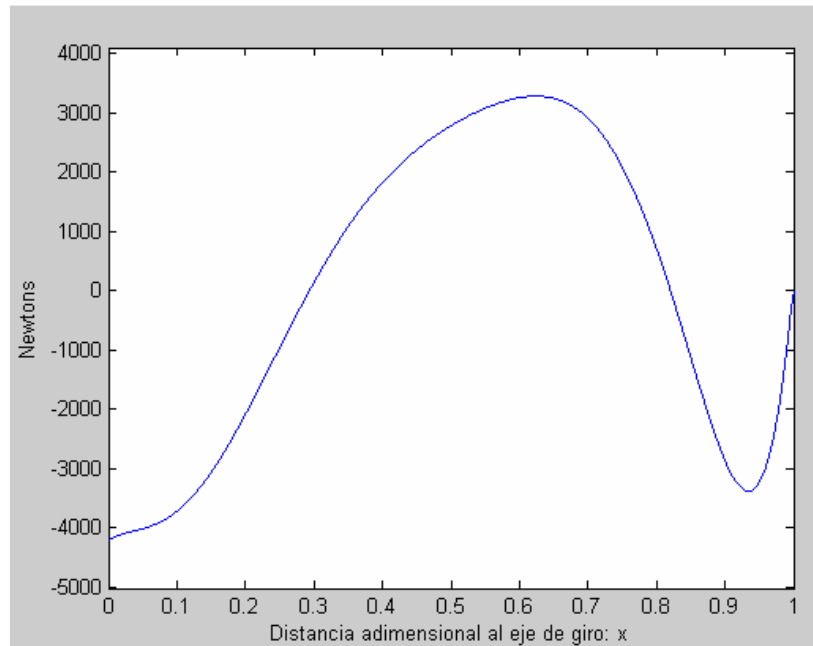


Figura 6.22 – Esfuerzo cortante para la carga 2

Se observa que la carga 1 da lugar a mayores esfuerzos cortantes que la carga 2. En este caso se produce un cambio de signo debido a que se reduce fuertemente la distribución de carga aerodinámica en la punta de la pala. Esto provoca que la resultante entre la carga aerodinámica y la de inercia se vaya reduciendo hasta tal punto en el que la fuerza de inercia se hace mayor que la aerodinámica provocando el cambio de signo. Este es el motivo por el que los cortantes de la carga 1 son mayores que los de la carga 2.

Momento flector:

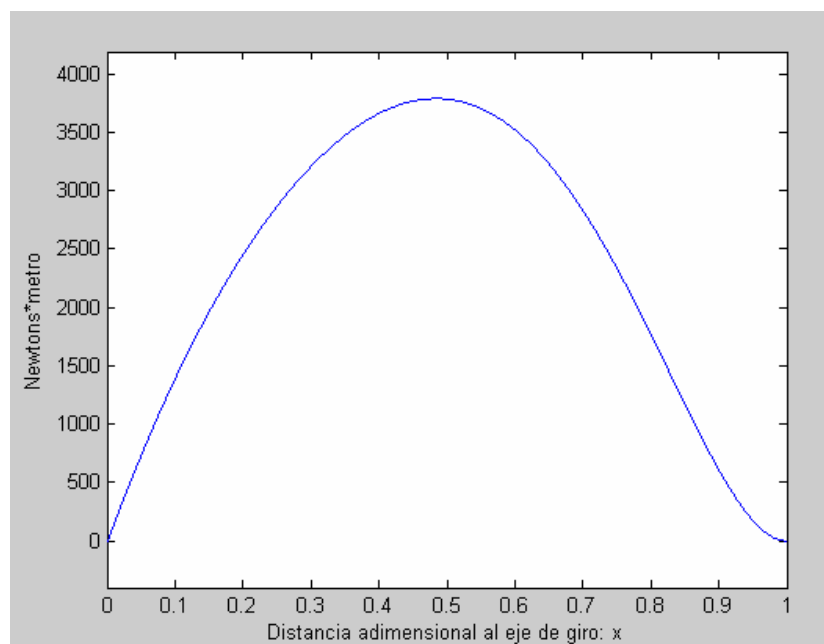


Figura 6.23 – Momento flector de la carga 1

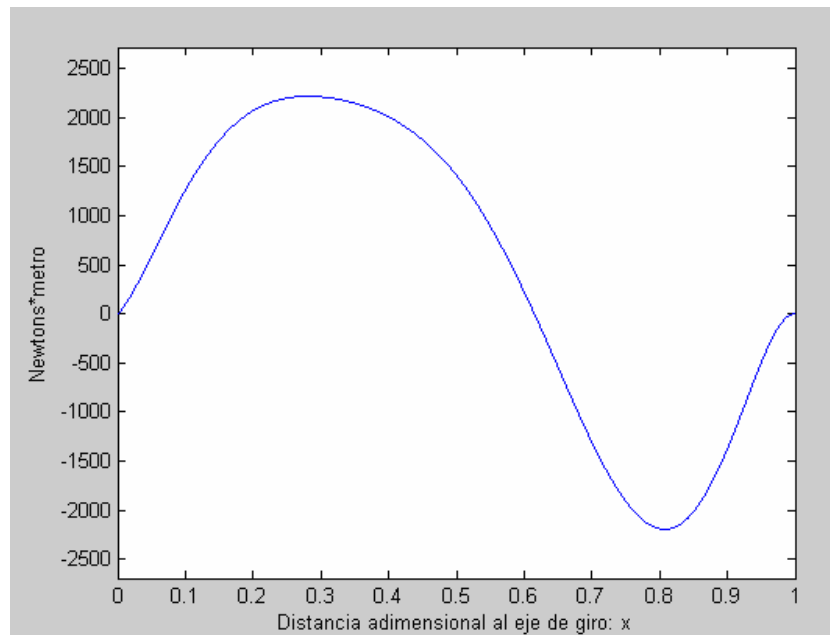


Figura 6.24 – Momento flector de la carga 2

Para la carga 1 la ley de momentos flectores solo tiene signo positivo. Sin embargo, por el mismo motivo que sucede con el esfuerzo cortante, la carga 2 produce un cambio de signo en la ley de momentos flectores.

Coefficiente de seguridad:

Los coeficientes de seguridad obtenidos son los siguientes:

Lámina	Carga 1	Carga 2
0°	4.85	4.32
90°	1.48	1.32
45°	2.06	1.84
-45°	2.06	1.84

Tabla 6.2 – Coeficientes de seguridad

Capítulo 7

ANÁLISIS DINÁMICO

7.1 INTRODUCCION

En este capítulo se van a desarrollar los conceptos básicos relativos a las características de vibración de las palas del rotor. En este sentido se expondrá primero la teoría relativa a la obtención de las frecuencias naturales y las formas propias de vibración, para posteriormente aplicar dicha teoría al caso práctico de diseño que se está tratando.

En el análisis que se está realizando de las palas en rotación del helicóptero es de suma importancia la necesidad de realizar un estudio en las vibraciones libres que se tienen cuando se somete a la pala a una velocidad de rotación constante.

El helicóptero genera su sustentación y su propulsión por medio de fuerzas aerodinámicas que varían según el tiempo y que presentan un amplio espectro de frecuencias relacionadas con las de rotación de sus rotores. La estructura del helicóptero es, por su parte, una estructura elástica que responderá a la excitación de las fuerzas aerodinámicas con una amplitud mayor o menor según cual sea la relación entre sus frecuencias propias y las frecuencias excitadoras.

Las vibraciones se originan, normalmente, en las palas de los rotores y pueden ser un problema para las propias palas, sometidas a esfuerzos variables con el tiempo y repetitivos que pueden causar problemas de fatiga.

La simetría del rotor tiende a filtrar algunas de las frecuencias de las palas, pero transmite otras al cubo del rotor y al propio fuselaje, que pueden originar respuestas del mismo con esfuerzos excesivos e incomodidades para la tripulación y los pasajeros, por lo que es frecuente disponer de medios para su amortiguamiento.



El hecho de que las fuerzas aerodinámicas generadas en las palas sean no estacionarias pueden dar origen a fenómenos de flameo, ya que las palas poseen una elasticidad elevada, por lo que este fenómeno puede presentarse a velocidades de vuelo inferiores que para las aeronaves de alas fijas.

Se va a analizar a continuación algunos de estos comportamientos que son importantes en el diseño de toda aeronave de alas giratorias.

7.2 VIBRACIONES DE LAS PALAS

Unos elementos directamente sometidos a la acción de fuerzas de frecuencias múltiplo de las de giro del rotor son las palas del mismo. Es, por tanto, importante poder determinar sus frecuencias propias para tratar de evitar fenómenos de resonancia.

7.2.1 Vibraciones libres de la pala

Cuando se considera la pala girando pero sin ninguna fuerza aerodinámica, la única fuerza aplicada además de la centrífuga, es la que procede de la inercia de los elementos en su deformación, prescindiendo del peso que es muy pequeño. Si la elástica de la pala es función $y(r,t)$, resulta que:

$$\text{fuerzas inerciales} = -m \cdot a = -m \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad [7.1]$$

Y como $w(r)=0$ la ecuación de la elástica descrita en [5.6] resulta:

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial r} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(N \frac{\partial y}{\partial r} \right) = -m \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}} \quad [7.2]$$

Se puede observar de esta ecuación las siguientes propiedades:

- La ecuación es lineal, de cuarto orden según la variable espacial r y de segundo orden según el tiempo t , y con coeficientes variables a lo largo de la longitud (EI , $N(r)$).
- La linealidad de la ecuación permite una solución por separación de variables. De este modo la ecuación de la elástica $y(r,t)$ se puede desarrollar en serie de sus modos y frecuencias propias (ω_i, y_i) .



$$y(r, t) = \sum_1^{\infty} y_i(r) \cdot \text{sen}(\omega_i t) \quad [7.3]$$

El calculo de las formas propias y de sus correspondientes frecuencias de vibración, comprenden el mayor gasto computacional al analizar vigas rotativas. Desafortunadamente, aunque la ecuación diferencial básica es lineal, no existe una solución general incluso aunque las propiedades permanezcan constantes a lo largo de la pala, y para resolverla es necesario aplicar método numérico, como por ejemplo la técnica de Holzer-Mikestad o métodos basados en elementos finitos.

Si se sustituye el desarrollo en serie en la ecuación [7.2] y se igualan los coeficientes de $\text{sen}(\omega_i t)$ en ambos miembros, se tiene la sucesión de ecuaciones diferenciales ordinarias siguiente:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(EI \sum_1^{\infty} y_i(r) \cdot \text{sen}(\omega_i t) \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(N \sum_1^{\infty} y_i(r) \cdot \text{sen}(\omega_i t) \right) = m \sum_1^{\infty} y_i(r) \cdot \omega_i^2 \cdot \text{sen}(\omega_i t)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(EI \frac{\partial^2 y_i}{\partial r^2} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(N \frac{\partial y_i}{\partial r} \right) = -m \cdot \omega_i^2 \cdot y_i(r)} \quad [7.4]$$

Que junto con las condiciones siguientes definen las formas propias $y_i(r)$ de la pala.

- Momento flector en la punta: $y_i''(R - e) = 0$
- Cortante en punta: $y_i'''(R - e) = 0$
- Pala articulada: $y_i(0) = 0$; $y_i''(0) = 0$ [7.5]

Se va a transformar ahora el problema de contorno en una ecuación integrodiferencial. Para ello se tiene que multiplicar la ecuación [7.4] por $y_i(r)$ e integrar entre 0 y (R-e):

$$\int_0^{R-e} y_i(r) \frac{d^2}{dr^2} \left(EI \frac{\partial^2 y_i}{\partial r^2} \right) dr - \int_0^{R-e} y_i(r) \frac{d}{dr} \left(N \frac{\partial y_i}{\partial r} \right) dr = \int_0^{R-e} m \cdot \omega_i^2 \cdot y_i^2(r) dr$$



Integrando por partes y aplicando las condiciones de contorno, se obtiene:

- Primer miembro:

$$\begin{aligned} \int_0^{R-e} y_i(r) \frac{d^2}{dr^2} \left(EI \frac{d^2 y_i}{dr^2} \right) dr &= \left[y_i(r) \frac{d}{dr} (EI y_i'') \right]_0^{R-e} - \int_0^{R-e} y_i'(r) \frac{d}{dr} \left(EI \frac{d^2 y_i}{dr^2} \right) dr = \\ &= -[y_i'(r) (EI y_i'')]_0^{R-e} + \int_0^{R-e} (EI y_i'') y_i''(r) dr = \int_0^{R-e} EI \left(\frac{d^2 y_i(r)}{dr^2} \right)^2 dr \end{aligned}$$

- Segundo miembro:

$$\int_0^{R-e} y_i(r) \frac{d}{dr} \left(N \frac{dy_i(r)}{dr} \right) dr = [y_i(r) (N \cdot y_i'(r))]_0^{R-e} - \int_0^{R-e} (N y_i') y_i' dr = - \int_0^{R-e} (N y_i') y_i' dr$$

Y finalmente resulta:

$$\int_0^{R-e} EI \left(\frac{d^2 y_i(r)}{dr^2} \right)^2 dr + \int_0^{R-e} N \left(\frac{dy_i}{dr} \right)^2 dr = \omega_i^2 \int_0^{R-e} m y_i^2(r) dr \quad [7.6]$$

Que expresa simplemente que, durante el proceso de vibración, la energía de flexión mas la de alargamiento cuando esta en su posición de máxima deformación (velocidad nula), es igual a la energía cinética cuando pasa por la posición de deformación nula.

Se va a intentar despejar de esta última ecuación el valor de ω_i , para lo que es necesario primero calcular algunas integrales intermedias. Si se considera una masa M_t en punta, la fuerza normal que actúa sobre una sección cualquiera será:

$$N = \int_0^{R-e} m \Omega^2 (r_1 + e) dr_1 + M_t \Omega^2 R \quad [7.7]$$

Con lo cual:

$$\int_0^{R-e} N \left(\frac{dy_i}{dr} \right)^2 dr = \Omega^2 \int_0^{R-e} \left(\frac{dy_i}{dr} \right) \left[\int_r^{R-e} m r_1 dr_1 + e \int_r^{R-e} m dr_1 \right] dr + M_t R \Omega^2 \int_0^{R-e} \left(\frac{dy_i}{dr} \right)^2 dr \quad [7.8]$$



Las integrales del segundo miembro pueden transformarse realizando una integración por partes y teniendo en cuenta las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} \int_0^{R-e} \left(\frac{dy_i}{dr} \right)^2 \left[\int_0^{R-e} m r_1 dr_1 \right] dr &= \int_0^r \left(\frac{dy_i}{dr_1} \right)^2 dr_1 \int_r^{R-e} m r_1 dr_1 \Big|_0^{R-e} + \int_0^{R-e} m r \left(\int_0^r \left(\frac{dy_i}{dr_1} \right)^2 dr_1 \right) dr = \\ &= \int_0^{R-e} m r \left(\int_0^r \left(\frac{dy_i}{dr_1} \right)^2 dr_1 \right) dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{R-e} \left(\frac{dy_i}{dr} \right)^2 \left[\int_0^{R-e} m dr_1 \right] dr &= \int_0^r \left(\frac{dy_i}{dr_1} \right)^2 dr_1 \int_r^{R-e} m dr_1 \Big|_0^{R-e} + \int_0^{R-e} m \left(\int_0^r \left(\frac{dy_i}{dr_1} \right)^2 dr_1 \right) dr = \\ &= \int_0^{R-e} m \left(\int_0^r \left(\frac{dy_i}{dr_1} \right)^2 dr_1 \right) dr \end{aligned}$$

Con lo cual al despejar ω_i en [7.6] queda:

$$\omega_i^2 = \frac{\int_0^{R-e} EI \left(\frac{d^2 y_i(r)}{dr^2} \right)^2 dr}{\int_0^{R-e} m y_i^2(r) dr} + \Omega^2 \left[\frac{\int_0^{R-e} m r \left(\int_0^r \left(\frac{dy_i}{dr_1} \right)^2 dr_1 \right) dr}{\int_0^{R-e} m y_i^2(r) dr} + \right. \quad [7.9]$$

$$\left. + e \frac{\int_0^{R-e} m \left(\int_0^r \left(\frac{dy_i}{dr_1} \right)^2 dr_1 \right) dr}{\int_0^{R-e} m y_i^2(r) dr} + M_t R \frac{\int_0^{R-e} \left(\frac{dy_i}{dr_1} \right)^2 dr}{\int_0^{R-e} m y_i^2(r) dr} \right]$$

De la anterior ecuación se puede observar como las frecuencias propias de vibración ω_i son función de la rigidez específica (EI), de la distribución de masa (m), del régimen de giro (Ω), de la excentricidad de la articulación de batimiento o del empotramiento (e) y de la masa colocada en punta M_t .



Si se adimensionaliza la expresión anterior resulta:

$$\omega_i^2 = \frac{(EI)_0}{\underbrace{m_0(R-e)^4}_{\omega_0^2}} \frac{\int_0^1 \frac{EI}{(EI)_0} \left(\frac{d^2 \bar{y}_i}{dx^2} \right)^2 dx}{\underbrace{\int_0^1 \left(\frac{m}{m_0} \right) \bar{y}_i^2 dx}_{a_i^2}} + \Omega^2 \left[\frac{\int_0^1 \left(\frac{m}{m_0} \right) x \left(\int_0^x \left(\frac{d \bar{y}_i}{dx_1} \right)^2 dx_1 \right) dx}{\underbrace{\int_0^{R-e} \left(\frac{m}{m_0} \right) \bar{y}_i^2 dx}_{k_{0,i}}} + \right. \\ \left. + \bar{e} \frac{\int_0^1 \left(\frac{m}{m_0} \right) \left(\int_0^x \left(\frac{d \bar{y}_i}{dx_1} \right)^2 dx_1 \right) dx}{\underbrace{\int_0^1 \left(\frac{m}{m_0} \right) \bar{y}_i^2 dx}_{k_{1,i}}} + \frac{M_t R}{m_0(R-e)^2} \frac{\int_0^1 \left(\frac{d \bar{y}_i}{dx_1} \right)^2 dx}{\underbrace{\int_0^1 \left(\frac{m}{m_0} \right) \bar{y}_i^2 dx}_{\Delta k_i}} \right] \\ \boxed{\omega_i^2 = \underbrace{a_i^2 \omega_0^2}_{\omega_{i_0}^2} + \Omega^2 \left[k_{0,i} + \bar{e} k_{1,i} + \frac{M_t R}{m_0(R-e)^2} \Delta k_i \right] = \omega_{i_0}^2 + \Omega^2 k_i} \quad [7.10]$$

Donde ω_{i_0} representa la frecuencia natural i-esima de la viga sin rotación y k_i es un término adicional que tiene en cuenta los efectos de la fuerza centrífuga y que se denomina comúnmente como coeficiente de Southwell para el modo i.

Los coeficientes a_i , k_{0i} , k_{1i} y Δk_i dependen de la forma propia y_i así como de la distribución de masas y rigideces, según los casos.

Se producirá resonancia cuando la frecuencia propia ω_i sea múltiplo de la de giro de la pala (que son las frecuencias de las fuerzas aerodinámicas excitadoras), es decir:

$$\omega_i = n\Omega_{res} \rightarrow n^2 \Omega^2 = \omega_{i_0}^2 + \Omega_{res}^2 k_i \quad [7.11]$$

$$\boxed{\Omega_{res} = \frac{\omega_{i_0}}{\sqrt{n^2 - k_i}}} \text{ con } n \in N \text{ y } n^2 > k_i \quad [7.12]$$



Esta relación se representa gráficamente en el denominado diagrama de resonancia (figura 7.1) que puede adoptar la forma de intersección de una hipérbola con rectas, o bien de intersección entre rectas, para cada uno de los modos propios y_i , y que indica los regímenes del rotor a evitar.

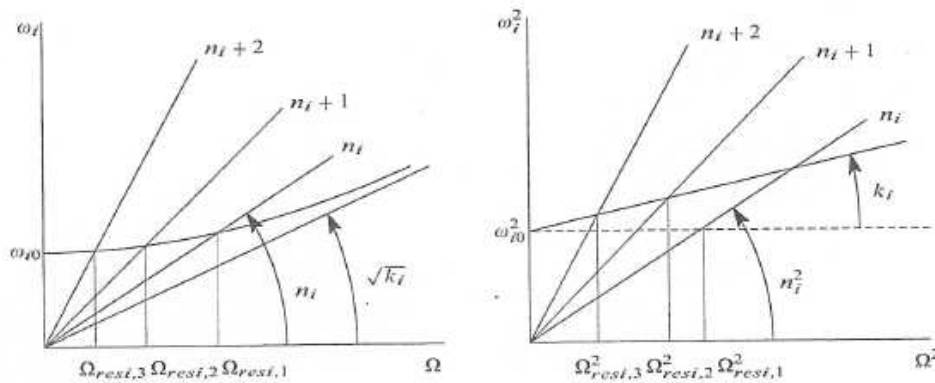


Figura 7.1 – Diagrama de resonancia

Para cada modo se presenta un infinito numerable de regímenes de resonancia. El de mayor frecuencia corresponde al menor número natural n_i que supera a $k_i^{1/2}$. Como los armónicos excitadores (fuerzas aerodinámicas) van disminuyendo en amplitud cuando aumenta su orden, las resonancias correspondientes a las frecuencias menores van siendo progresivamente menos importantes.

7.2.2 Palas sin rotación

La determinación de las frecuencias propias ω_i exige el conocimiento de las formas propias de la pala $y_i(x)$ para poder calcular los coeficientes a_i y k_i .

Sin embargo la teoría de vibraciones demuestra que las frecuencias propias no están muy afectadas cuando se sustituye $y_i(x)$ por otra función que cumpla las condiciones de contorno y tenga el mismo número de nodos que ella.

Debido a ello es posible sustituir $y_i(x)$ por el correspondiente modo propio de la pala sin rotación y_{i0} .



Al no haber rotación, la fuerza normal se anula y por tanto la ecuación diferencial queda:

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial r} \left(EI \frac{\partial^2 y_{i0}}{\partial r^2} \right) - m \cdot \omega_{i0}^2 \cdot y_{i0} = 0} \quad [7.13]$$

Si se adimensionaliza esta ecuación se tiene:

$$\frac{(EI)_0}{(R-e)^3} \frac{\partial^2}{\partial x} \left(\frac{EI}{(EI)_0} \frac{\partial^2 \bar{y}_{i0}}{\partial x^2} \right) - m_0 (R-e) \left(\frac{m}{m_0} \right) \cdot \omega_{i0}^2 \cdot \bar{y}_{i0} = 0$$

En el caso de masa y rigidez constantes, se reduce a:

$$\frac{d^4 \bar{y}_{i0}}{dx^4} - \frac{m_0 (R-e)^4}{(EI)_0} \omega_{i0}^2 \bar{y}_{i0} = 0$$

Que se expresa como:

$$\boxed{\frac{d^4 \bar{y}_{i0}}{dx^4} - \lambda_i^4 \bar{y}_{i0} = 0} \quad [7.14]$$

$$\text{Siendo } \lambda_i^4 = \frac{m_0 (R-e)^4}{(EI)_0} \omega_{i0}^2 = a_i^2$$

La solución general de la ecuación diferencial anterior [7.14] es:

$$\bar{y}_{i0} = C_1 \sin(\lambda_i x) + C_2 \cos(\lambda_i x) + C_3 \sinh(\lambda_i x) + C_4 \cosh(\lambda_i x) \quad [7.15]$$

Esta misma solución se usara tanto en palas de sección constante como en palas de sección variable.



Sus derivadas resultan:

$$\begin{aligned}
 \overline{y}_{i_0}' &= \lambda_i [C_1 \sin(\lambda_i x) + C_2 \cos(\lambda_i x) + C_3 \sinh(\lambda_i x) + C_4 \cosh(\lambda_i x)] \\
 \overline{y}_{i_0}'' &= -\lambda_i^2 [C_1 \sin(\lambda_i x) + C_2 \cos(\lambda_i x) - C_3 \sinh(\lambda_i x) - C_4 \cosh(\lambda_i x)] \\
 \overline{y}_{i_0}''' &= -\lambda_i^3 [C_1 \cos(\lambda_i x) - C_2 \sin(\lambda_i x) - C_3 \cosh(\lambda_i x) - C_4 \sinh(\lambda_i x)]
 \end{aligned} \quad [7.16]$$

Y para cumplir las condiciones de contorno:

$$x=1 \begin{cases} \overline{y}_{i_0}''(1) = 0 \rightarrow C_1 \sin \lambda_i + C_2 \cos \lambda_i = C_3 \sinh \lambda_i + C_4 \cosh \lambda_i \\ \overline{y}_{i_0}'''(1) = 0 \rightarrow C_1 \cos \lambda_i - C_2 \sin \lambda_i = C_3 \cosh \lambda_i + C_4 \sinh \lambda_i \end{cases}$$

$$x=0 \begin{cases} \overline{y}_{i_0}(0) = 0 \rightarrow C_2 = -C_4 \\ \overline{y}_{i_0}''(0) = 0 \rightarrow C_2 = C_4 \end{cases}$$

Viga Articulada

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
 C_1 \sin(\lambda_i) &= C_3 \sinh(\lambda_i) \\
 C_1 \cos(\lambda_i) &= C_3 \cosh(\lambda_i)
 \end{aligned}$$

Se divide una ecuación por otra y se obtiene una solución diferente a la idénticamente nula, es decir:

$$\tan(\lambda_i) = \tanh(\lambda_i) \quad [7.17]$$

Que es la ecuación de los autovalores, figura 7.2:

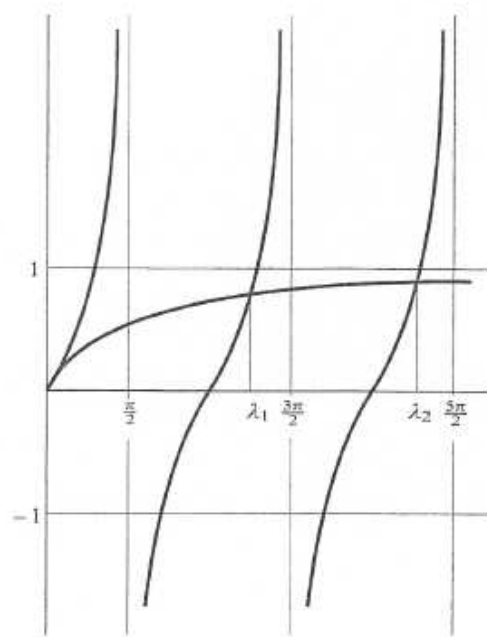


Figura 7.2 – Pala articulada. Autovalores

Con lo que:

$$\lambda_i = (4i + 1)\frac{\pi}{4} - \varepsilon_i$$

Siendo:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \varepsilon_i = 0$$

La forma propia queda de la siguiente manera:

$$\bar{y}_{i_0} = \frac{\sin(\lambda_i, x)}{\sin(\lambda_i)} + \frac{\sinh(\lambda_i, x)}{\sinh(\lambda_i)} = \sin(\lambda_i, x) + \frac{\sin(\lambda_i)}{\sinh(\lambda_i)} \sinh(\lambda_i, x) \quad [7.18]$$

Para modos suficientemente grandes, puede hacerse:

$$\bar{y}_{i_0} \approx \sin(\lambda_i x) \quad [7.19]$$



7.2.3 Diagrama de resonancia generalizado

Sustituimos las ecuaciones de las formas propias obtenidas en las siguientes expresiones de los coeficientes a_i , k_{0i} , k_{1i} y Δk_i . Como \bar{y}_i' e \bar{y}_i'' son proporcionales a λ_i e λ_i^2 respectivamente, resulta:

$$\begin{aligned}
 a_i^2 &= \lambda_i^4 \frac{\int_0^1 \frac{EI}{(EI)_0} \left(\frac{\bar{y}_{i0}''}{\lambda_i^2} \right)^2 dx}{\int_0^1 \left(\frac{m}{m_0} \right) \bar{y}_{i0}^2 dx} \\
 k_{0,i} &= \lambda_i^2 \frac{\int_0^1 \left(\frac{m}{m_0} \right) x \left(\int_0^x \left(\frac{\bar{y}_{i0}'}{\lambda_i} \right)^2 dx_1 \right) dx}{\int_0^1 \left(\frac{m}{m_0} \right) \bar{y}_{i0}^2 dx} \\
 k_{1,i} &= \lambda_i^2 \frac{\int_0^1 \left(\frac{m}{m_0} \right) \left(\int_0^x \left(\frac{\bar{y}_{i0}''}{\lambda_i} \right)^2 dx_1 \right) dx}{\int_0^1 \left(\frac{m}{m_0} \right) \bar{y}_{i0}^2 dx} \\
 \Delta k_i &= \lambda_i^2 \frac{\int_0^1 \left(\frac{\bar{y}_{i0}'}{\lambda_i} \right)^2 dx}{\int_0^1 \left(\frac{m}{m_0} \right) \bar{y}_{i0}^2 dx}
 \end{aligned}
 \tag{7.20}$$

La expresión de la frecuencia propia es:

$$\omega_i^2 = a_i^2 \omega_0^2 + a_i \Omega^2 [k_i] \tag{7.21}$$



Dividimos la ecuación por $a_i^2 \omega_0^2$ y queda:

$$\left(\frac{\omega_i}{a_i \omega_0} \right)^2 = 1 + \left(\frac{\Omega}{\sqrt{a_i} \omega_0} \right)^2 \cdot f(k_i) \quad [7.22]$$

Se tiene el fenómeno de resonancia cuando la velocidad de la fuerza excitadora sea múltiplo de la frecuencia propia de la viga, es decir:

$$\left(\frac{\omega_i}{a_i \omega_0} \right)^2 = \left(\frac{n\Omega}{a_i \omega_0} \right)^2 = \frac{n^2}{a_i} \left(\frac{\Omega}{\sqrt{a_i} \omega_0} \right)^2 \quad [7.23]$$

Se puede dibujar esta función en un diagrama en el que se representa $(\omega_i / a_i \omega_0)^2$ en función de $(\Omega / \sqrt{a_i} \omega_0)^2$. Esta representación grafica se conoce con el nombre de diagrama de resonancia generalizado, figura 7.3. Se puede utilizar una recta única para representar las frecuencias propias de la viga en función del régimen de rotación.

La resonancia se producirá cuando $\omega_i = n\Omega$, es decir, rectas de pendiente n^2 / a_i que cortan con la recta representativa de la viga dan frecuencias de resonancia.

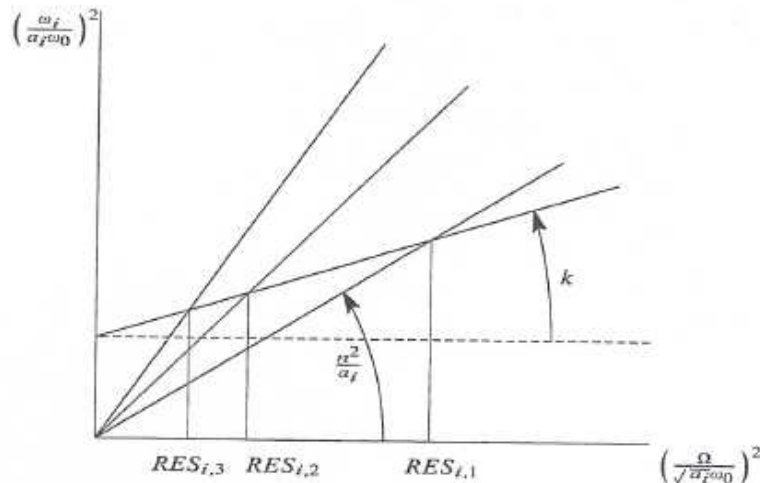


Figura 7.3 – Diagrama de resonancia generalizado



La pendiente k de la reta de la pala se puede variar, modificando la excentricidad y la masa en punta de la pala:

$$\bar{e} = \frac{e}{R - e}$$

$$k_i = \frac{M_p R}{m_0 (R - e)^2}$$

Esta representación es tanto mas exacta cuanto mayor es el orden del armónico considerado.

7.3 RESULTADOS

En este apartado se compararan los valores de las frecuencias propias obtenidas para el tipo de sección variable en palas articuladas.

Los parámetros que se introducen en el programa son los siguientes:

Radio del rotor	7.64m
Excentricidad	0.38m
Cuerda	0.53m
Nº de sub laminados	1
Masa por unidad de longitud en extremo articulado	1.51Kg/m
Masa por unidad de longitud en extremo libre	1.33Kg/m
Velocidad de giro	275.63rpm

Tabla 7.1 – Parámetros de diseño

Según se explicó en la teoría de este capítulo las formas propias de una pala articulada vienen dadas por:

$$\bar{y}_{i_0} \approx \sin(\lambda_i x)$$

Con

$$\lambda_i = (4i + 1) \frac{\pi}{4}$$

De manera que:

Modo	1	2	3	4	5	6	7	8
λ_i	3.925	7.065	10.205	13.345	16.485	19.625	22.765	25.905

Las formas propias obtenidas para los ocho modos de vibración son las siguientes:

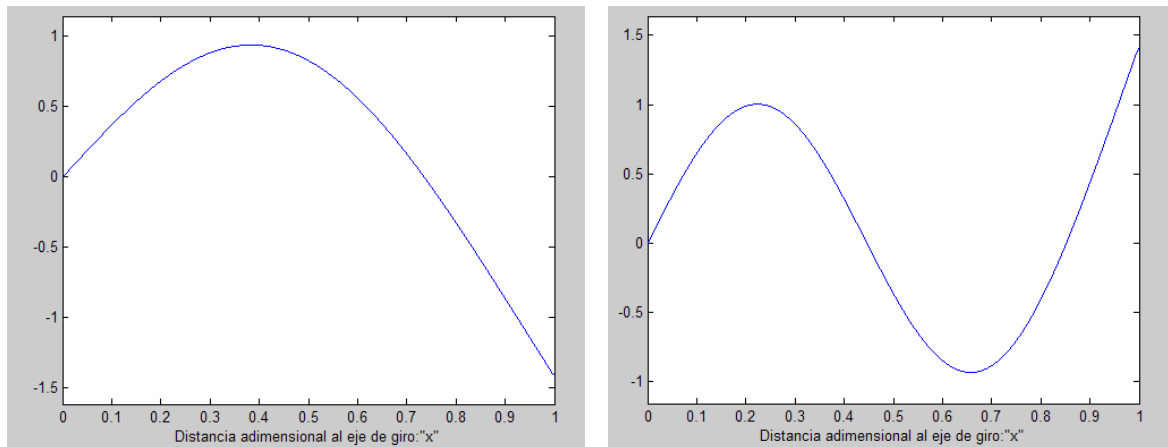


Figura 7.4a – Formas propias 1 y 2

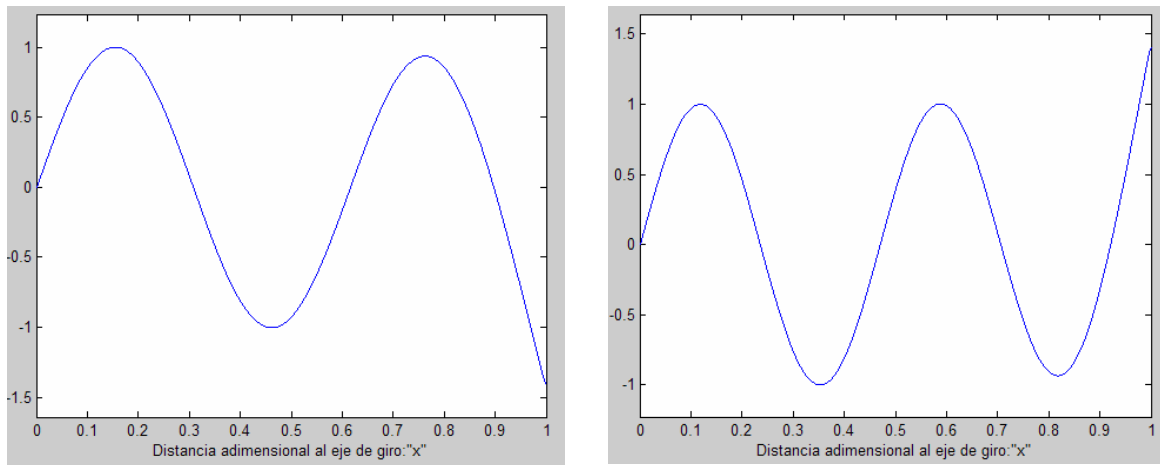


Figura 7.4b – Formas propias 3 y 4

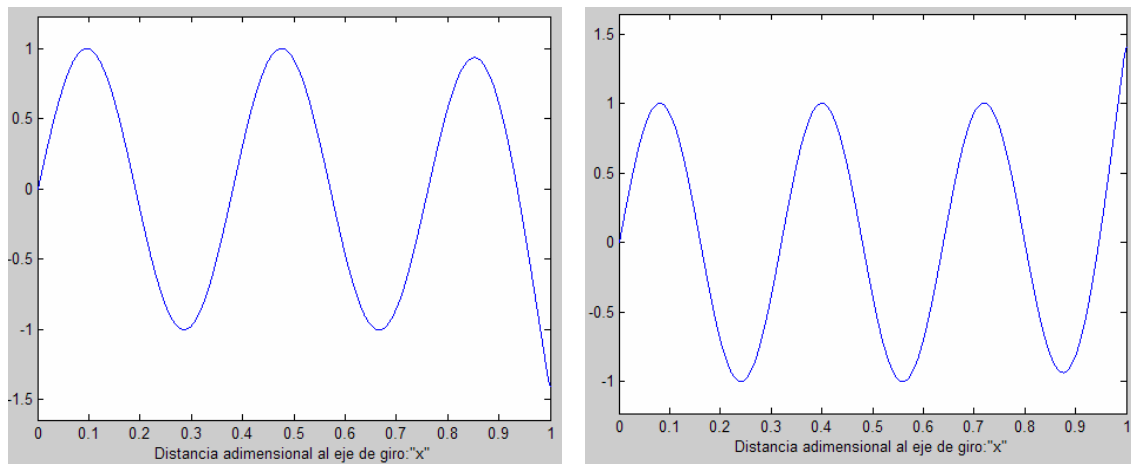


Figura 7.4c – Formas propias 5 y 6

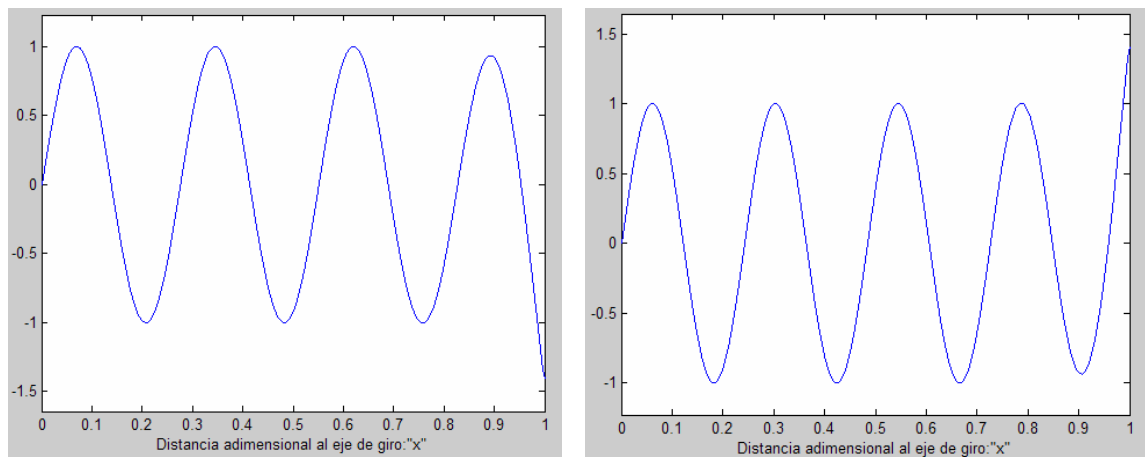


Figura 7.4d – Formas propias 7 y 8

Una vez obtenidos los λ_i y las formas propias se pueden calcular los coeficientes de Southwell, se muestran en la siguiente tabla:

Modo	1	2	3	4	5	6	7	8
a_i	15.22	49.31	102.85	175.85	268.32	380.25	511.64	662.50
$k_{0,i}$	5.89	17.85	36.38	61.47	93.1115	131.30	176.05	227.34
$k_{1,i}$	9.09	27.06	54.90	92.58	140.10	197.47	264.68	341.74
Δk_i	20.06	58.01	115.88	193.66	291.35	408.94	546.43	703.82

Tabla 7.2 – Coeficientes de Southwell



Con lo que ya se puede pasar a calcular las frecuencias propias. Quedan reflejadas en la siguiente tabla:

Modo	1	2	3	4	5	6	7	8
$\omega_{i0} (cpm)$	472	1529	3189	5454	8321	11793	15868	20547
k_i	8.92	26.64	53.99	90.93	137.48	193.62	259.36	334.70
$\omega_i (cpm)$	944	2082	3771	6046	8919	12393	16469	21148

$$\text{Donde } \omega_0 = \sqrt{\frac{(EI)_0}{m_0(R-e)^4}} = 31.01 \text{ cpm}$$

Ahora se va a comprobar en que modos propios es posible encontrar problemas de resonancia. Para ello se dividen las frecuencias propias entre el régimen de giro de las palas del rotor, de manera que proporciones una idea de en que armónico se puede encontrar el problema.

Modo	1	2	3	4	5	6	7	8
ω_i / Ω	3.44	7.57	13.70	21.96	32.38	44.98	59.77	76.75

A la vista de la tabla anterior se deduce que existe peligro de resonancia en los modos de vibración 4° y 6° para los armónicos 22 y 45 respectivamente. La resonancia en el modo 6° armónico 45 se despreciará ya que los regímenes de resonancia que presentan mayor peligro son los que se encuentran para armónicos más bajos.

En la tabla 7.3 se muestran los posibles regímenes de resonancia para cada armónico.



Modo Armónico	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1,713	0	0	0	0	0	0	0
4	0,184	0	0	0	0	0	0	0
5	0,127	0	0	0	0	0	0	0
6	0,092	0,502	0	0	0	0	0	0
7	0,078	0,324	0	0	0	0	0	0
8	0,066	0,253	1,012	0	0	0	0	0
9	0,064	0,216	0,613	0	0	0	0	0
10	0,056	0,186	0,477	1,815	0	0	0	0
11	0,048	0,167	0,396	0,994	0	0	0	0
12	0,046	0,143	0,348	0,753	3,265	0	0	0
13	0,046	0,132	0,307	0,627	1,488	0	0	0
14	0,038	0,123	0,276	0,537	1,097	7,651	0	0
15	0,036	0,116	0,24	0,478	0,899	2,112	0	0
16	0,031	0,108	0,227	0,425	0,767	1,494	0	0
17	0,032	0,099	0,216	0,399	0,686	1,215	2,923	0
18	0,032	0,090	0,194	0,369	0,613	1,032	1,974	0
19	0,038	0,088	0,183	0,336	0,563	0,917	1,575	4,012
20	0,020	0,086	0,171	0,314	0,514	0,826	1,347	2,543
21	0,027	0,086	0,161	0,295	0,482	0,758	1,183	1,994
22	0,026	0,072	0,154	0,275	0,454	0,698	1,065	1,687
23	0,028	0,071	0,153	0,262	0,422	0,645	0,973	1,475

Tabla 7.3 – Regímenes de resonancia

Los valores de la tabla se deben multiplicar por 10^3 .

En la tabla se observa que efectivamente para el 4º modo armónico 22 se obtiene un régimen de resonancia de 275 rpm, muy cercano al de giro de nuestro rotor 275,65 rpm. A continuación se representa el diagrama de resonancia para el modo 4º para comprobar que la recta correspondiente al armónico 22 corta a una altura próxima a los 275,65 rpm. La recta correspondiente al armónico 22 es la que se representa en color rojo.

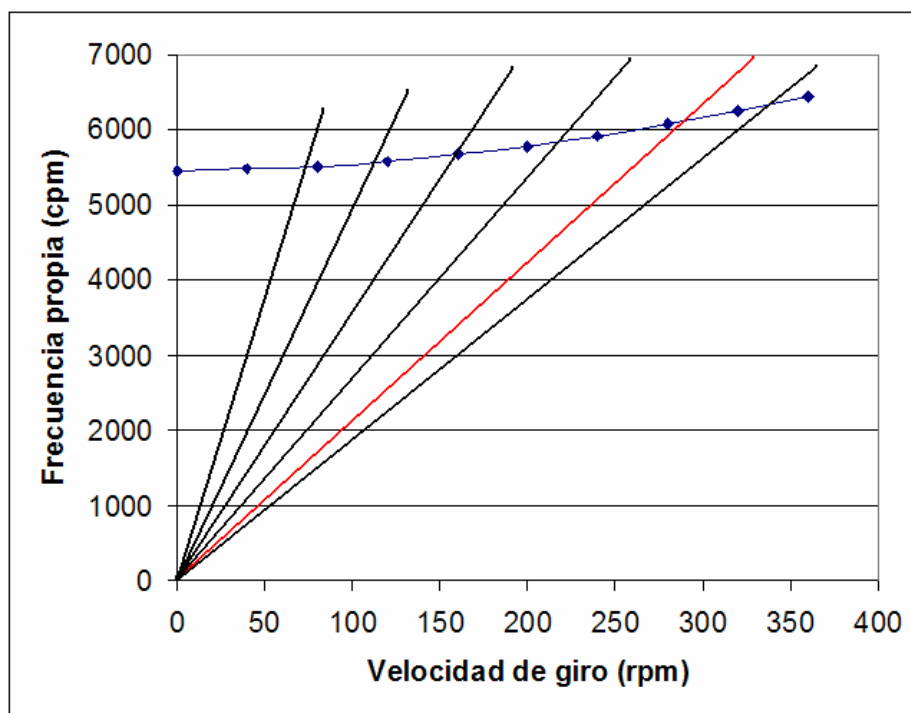


Figura 7.5 – Diagrama de resonancia para el modo 4

El modo y el armónico al que se produce la resonancia son altos por lo que no es excesivamente grave. Ahora bien, si se quiere modificar las frecuencias propias para intentar alejarlas del régimen de giro escogido, se puede hacer de dos maneras, bien variando la excentricidad de la articulación de batimiento, bien añadiendo una masa en punta. Se va a optar por esta segunda opción, ya que se aproxima bastante a la suposición de que en punta se coloca a veces un final de la pala con forma y materiales distintos para poder evitar así los problemas de resonancia añadiendo una masa de plomo.

Para ver que modos se excitan y en que armónicos en función de la masa que se añade, se han calculado sucesivamente todos los modos y armónicos para los que existen problemas de resonancia para ver si mejoran la solución inicial. En la siguiente tabla se muestran los resultados de añadir diferentes masas.



Masa (Kg)	Modo	Armónico
1	2	8
	5	33
2	1	4
	4	23
3	3	15
	9	98
4	2	9
	6	47
	7	62
5	4	24
	9	99

Cuando se añaden 5 Kg en punta el modo para el que se produce resonancia es el 4º, al igual que ocurría sin masa en punta, pero en este caso el armónico al que se produce es el 24 y en el caso de que no hay masa en el 22. Debido a que son en el mismo modo y casi el mismo armónico la configuración más apropiada se considera la que no tiene masa en punta. De esta manera el cálculo estático realizado en el capítulo 6 es válido.

CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

8.1 RESUMEN Y CONCLUSIONES

El cálculo de parámetros se divide en dos partes. Por una parte se obtuvo los parámetros característicos del helicóptero mediante las correlaciones propuestas (J.L. López Ruiz, 1993) y las obtenidas mediante el ajuste lineal a partir de los datos de helicópteros comerciales reales para todos los parámetros. Estos datos de partida se consideran aceptables en primera instancia. Por otra parte la obtención de los parámetros característicos de la sección que se deseaba estudiar. Para ello se utilizó algunas correlaciones propuestas por la bibliografía comentada y las obtenidas mediante la teoría de materiales compuestos de pared delgada. Los valores obtenidos mediante ambos métodos son considerablemente diferentes pero hay que tener en cuenta que la sección escogida para este proyecto es cajón y difiere de la correlación obtenida experimentalmente por la bibliografía. Se consideran válidos los datos calculados mediante la teoría de materiales compuestos de pared delgada.

En el cálculo estático se mostró la resolución de la ecuación de la elástica mediante el método de colocación. Se pudo comprobar la importancia de la elección del número de puntos de control para así aumentar la precisión de cálculo y reducir el coste computacional. Una vez obtenida la ecuación de la elástica, se obtuvieron los esfuerzos axiales, cortantes y flectores. A continuación se obtuvieron las tensiones y deformaciones de los laminados que conforman la pala aplicando la teoría de materiales compuestos de pared delgada. Posteriormente se aplicó el criterio de rotura Tsai-hill. Las particularidades del estudio que se realiza en el presente proyecto son que la pala se toma como articulada y se considera una variación lineal de la cuerda y el espesor de la pala. El número de sublaminados obtenidos para que soporte los esfuerzos es uno, por lo que el espesor de la pared es de 0.8 mm. Esto hace pensar que el espesor de las paredes obtenidas mediante una sección sándwich y otra cajón son similares. Si se tiene en cuenta que la sección cajón es hueca por dentro se puede pensar que ahorra en peso con respecto al sándwich. Otra de las conclusiones que se pueden extraer del cálculo estático son derivadas de los resultados hallados al comparar la distribución de carga aerodinámica mediante la función x^2 y la resultante de un estudio en túnel de viento.



Para el caso de la función x^2 el número de sublaminados necesarios para soportar los esfuerzos es dos mientras que en el estudio del túnel del viento es uno. Esto es debido a que la carga aerodinámica mediante el túnel del viento crece desde el extremo articulado parecida a la función x^2 sin embargo cuando se aproxima al extremo libre decrece rápidamente hasta cero mientras que la función x^2 sigue creciendo.

En el cálculo dinámico se obtuvieron las formas propias de vibración de la pala así como sus frecuencias propias. Se estudió la posibilidad de existencia de problemas de resonancia a la velocidad de giro del rotor. Los modos propios en los que se produce resonancia son aceptablemente altos. Además al añadir masa en punta se obtienen resultados peores o similares por lo que se considera válida la solución inicial sin masa en punta.

8.2 TRABAJOS FUTUROS

Tras la realización del presente proyecto se propone las siguientes ideas para mejorar el diseño de la pala del helicóptero:

- Considerar el diseño de la pala una torsión desde la raíz a la punta cuando está libre de cargas.
- Considerar en el cálculo de tensiones los efectos del esfuerzo cortante.
- Estudio de las frecuencias propias de vibración de la pala mediante métodos más exactos que el utilizado, como por ejemplo el método de Holzer-Myklestad.

Además, sería positivo realizar un cálculo más detallado mediante la utilización de métodos numéricos que reproduzca con precisión la geometría de la pala para así compararlo con los resultados obtenidos.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] JOSÉ LUIS LÓPEZ RUIZ. Helicópteros: Teoría y diseño conceptual. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos. 1993.
- [2] LUIS GUTIERREZ DE ROAZAS CARRERAS. Diseño y cálculo estructural preliminar del sistema sustentador de un helicóptero de transportes. Proyecto fin de carrera. E.P.S Universidad Carlos III de Madrid. 2005.
- [3] JOSÉ RAMÓN VALLE DE LA FUENTE. Cálculo estático y vibratorio de vigas giratorias. Proyecto fin de carrera. E.P.S Universidad Carlos III de Madrid. 2005
- [4] JOSÉ ANDRÉS FERNÁNDEZ GRANADO. Diseño preliminar de una pala del rotor principal de un helicóptero pesado. Proyecto fin de carrera. E.P.S Universidad Carlos III de Madrid. 2005.
- [5] AAGE ROED. Aerodinámica y actuaciones del helicóptero. Editorial Paraninfo. 1995.
- [6] JANE. Jane's all the world's aircraft. JANE'S INFORMATION GROUP. 2003.
- [7] JOHN R. MEYER Jr / GAETANO FALABELLA Jr. An investigation of the experimental aerodynamic loading on a model helicopter rotor blade. NACA-TN 2953. 1953.
- [8] ERIC M. HOLLMAN / MARTIN HOLLMAN. Modern helicopter design. Aircraft Design, inc. 2001



- [9] RICHARD L. BIELAWA. Rotary wing structural dynamics and aeroelasticity. AIAA Education Series. 1992.
- [10] LASZLO P. KOLLER / GEORGE S. SPRINGER. Mechanics of composite structural. Cambridge University Press. 2003.
- [11] REDDY, J.N. Mechanics of laminated composite plates: theory and nalysis. CRC Pres. 1945.
- [12] A.R.S. BRAMWELL / GEORGE DONE / DAVID BALMFORD. Bramwell's Helicopter Dynamics. Butterworth-Heinemann. 2001.
- [13] DONALD H. MIDDLETON. Composite materials in aircraft structures. Longman Haelow. 1990.

Anexo A

PROGRAMAS DE MATLAB

En este anexo se muestra el programa realizado en el entorno Matlab para la resolución de los cálculos analíticos.

El programa está formado por varios módulos. A continuación se muestra los módulos de los está formado el programa:

DATOS.m

Para no ser recurrente con la introducción de los datos de partida en los diferentes programas, se ha realizado un programa que es llamado por el resto en el cual están todos los parámetros de salida del estudio.

A continuación se muestra el programa:

```
% DATOS.m

% Datos del problema

Mg=7500*9.8;           % Peso del helicóptero
nt=3.5;                 % Factor de carga
np=4;                   % Número de palas
R=15.34/2;              % Radio en m
e=0.38;                 % Excentricidad en m
Q=273.65*2*pi/60;      % Velocidad de rotación en m/s
ead=e/(R-e);           % Valor adimensional de e
```



ESTATICO.m

Este programa se encarga de realizar el cálculo estático de la pala.

- Llama al programa DATOS.m
- Permite introducir el número de laminados de cada pared
- Permite reducir la cuerda de la pala un porcentaje
- Permite elegir el número de puntos de colocación
- Permite elegir la carga aerodinámica
- Devuelve la ecuación de la elástica, la ley de momento flector, la de axiles y la de cortantes
- Calcula las tensiones, deformaciones y coeficiente de seguridad de cada lámina

A continuación se muestra el programa:

```
% "CALCULO ESTATICO DE UNA PALA DE HELICOPTERO"

% DATOS.m

% Datos del problema

Mg=7500*9.8           % Peso del helicóptero
nt=3.5                % Factor de carga
np=4                  % Número de palas
R=15.34/2             % Radio en m
e=0.38                % Excentricidad en m
Q=273.65*2*pi/60      % Velocidad de rotación en m/s
ead=e/(R-e)           % Valor adimensional de e

% RIGIDEZYMASA.m

>> % Solicitud del número de sublaminados que compondrán cada sección

>> n=input('¿Cuántos laminados?');

% Datos de la lámina

>> E1=126e9;
>> E2=11e9;
>> G12=6.6e9;
>> v21=0.28;
>> v12=v21*(E2/E1);
```



```

>> % Cálculo de la matriz de rigidez de la lámina en ejes locales

>> q11=E1/(1-v12*v21);
>> q12=v21*E2/(1-v12*v21);
>> q21=v12*E1/(1-v12*v21);
>> q22=E2/(1-v12*v21);
>> qss=G12;

>> q=[q11 q12 0;q21 q22 0;0 0 qss];

>> % Cálculo de la matriz de rigidez de la lámina en ejes globales

>> syms a;
>> SC1=[cos(a)^2 sin(a)^2 -2*sin(a)*cos(a);sin(a)^2 cos(a)^2
2*sin(a)*cos(a);sin(a)*cos(a) -sin(a)*cos(a) (cos(a)^2-sin(a)^2)];
>> SC2=[cos(a)^2 sin(a)^2 sin(a)*cos(a);sin(a)^2 cos(a)^2 -
sin(a)*cos(a);-2*sin(a)*cos(a) 2*sin(a)*cos(a) (cos(a)^2-sin(a)^2)];

>> a=0;
>> Q0=eval(SC1)*q*eval(SC2);
>> a=pi/4;
>> Q45=eval(SC1)*q*eval(SC2);
>> a=-pi/4;
>> Q445=eval(SC1)*q*eval(SC2);
>> a=pi/2;
>> Q90=eval(SC1)*q*eval(SC2);
>> syms a;

>> Qt=Q0+Q45+Q445+Q90;
>>
>> % Matriz de rigidez del laminado

>> A=Qt*2*n*0.1e-3
>> a=inv(A)
>> D=zeros(3);
>> for i=1:4:4*n
    D1=Q90.*((0.1e-3*i)^3-(0.1e-3*(i-1))^3);
    D2=Q0.*((0.1e-3*(i+1))^3-(0.1e-3*i)^3);
    D3=Q445.*((0.1e-3*(i+2))^3-(0.1e-3*(i+1))^3);
    D4=Q45.*((0.1e-3*(i+3))^3-(0.1e-3*(i+2))^3);
    D=D+(2/3)*(D1+D2+D3+D4);
>> end
>> D
>> d=inv(D)

>> % Cálculo de la distribución de rigidez a lo largo de la
envergadura

>> y=input('¿tanto por uno de disminución de la sección?');

>> bf1=0.5325; % cuerda en sección articulada
>> bw1=0.12*bf1; % espesor en sección articulada
>> df1=bf1-2*4*n*0.1e-3; % cuerda media en sección articulada
>> dl=bw1-2*4*n*0.1e-3; % espesor medio en sección articulada
>> L=15.34/2;

```




```

>> EIyy1=(bf1*d1^2)/(2*a(1,1))+(2*bf1)/(d(1,1))+(2*bw1^3)/(12*a(1,1))
>> EIzz1=(bw1*df1^2)/(2*a(1,1))+(2*bw1)/(d(1,1))+(2*bf1^3)/(12*a(1,1))
>> EA1=2*bf1/a(1,1)+2*bw1/a(1,1)

>> bf0=(1-y)*0.5325; % cuerda en sección libre
>> bw0=(1-y)*0.12*bf0; % espesor en sección libre
>> df0=(1-y)*(bf0-2*4*n*0.1e-3); % cuerda media en sección libre
>> d0=(1-y)*(bw0-2*4*n*0.1e-3); % espesor medio en sección
libre

>> EIyy0=(bf0*d0^2)/(2*a(1,1))+(2*bf0)/(d(1,1))+(2*bw0^3)/(12*a(1,1))
>> EIzz0=(bw0*df0^2)/(2*a(1,1))+(2*bw0)/(d(1,1))+(2*bf0^3)/(12*a(1,1))
>> EA0=2*bf0/a(1,1)+2*bw0/a(1,1)

>> % Cálculo de la distribución de masa a lo largo de la envergadura

>> dens=1590;

>> A1=2*(bf1+(d1-2*4*n*0.1e-3))*2*4*n*0.1e-3;
>> m1=A1*dens

>> A0=2*(bf0+(d0-2*4*n*0.1e-3))*2*4*n*0.1e-3;
>> m0=A0*dens

% CALCULOESTATICO.m

syms m m0 Q r e R rx sx tx Y nt np g Mg EIyy0 EI x ead wal

m0=input('Masa en extremo libre: ')
m1=input('Masa en extremo articulado: ')
EIyy0=input('Rigidez en extremo libre: ')
EIyy1=input('Rigidez en extremo articulado: ')

m=(m0-m1)*x/(R-e)+m1;
Wa=wal*(-135.26*x^6+355.26*x^5-351.06*x^4+160.33*x^3-
31.82*x^2+2.5883*x-0.0025);

EI=(EIyy0-EIyy1)*x/(R-e)+EIyy1;
%
% Cálculo de r(x)

rx=EI/EIyy0

% Cálculo de s(x)

sx=(int(((m/m0)*(x+ead)),x,x,1))/(int(((m/m0)*(x+ead)),x,0,1))

% Cálculo de t(x)

k=(int((Wa/wal)*x,x,0,1))/(int((m/m0)*(x+ead)*x,x,0,1));
tx=Wa/wal-k*(m/m0)*(x+ead)

```



```
% Cálculo de E1 y E2

Tp=nt*Mg/np;
w0=(EIyy0/(m0*(R-e)^4))^(1/2);
w1=(Tp/(m0*(R-e)^2))^(1/2);

E1=(Q/w0)^2*int((m/m0)*(x+ead),x,0,1)
E2=((w1/w0)^2/0.442626)

% Método de colocación

nf=input('¿Cuántos nodos de colocación? ');

disp('Familia de polinomios para el ajuste de la elástica')

% Funciones Fi

for i=0:nf
    Fi(i+1)=x^(i+1)*(1-(2*i/(i+2))*x+((i*(i+1)/((i+2)*(i+3)))*x^2));
    pretty(expand(Fi(i+1)))
end

% Derivadas

F1=diff(Fi,1);
disp('Derivada 1: F1');
pretty(expand(F1));

F2=diff(Fi,2);
disp('Derivada 2: F2');
pretty(expand(F2));

% Se despejan los términos de la ecuación

Yt1=diff((rx*F2),2);
Yt2=E1*(diff((sx*F1),1));

Y1=zeros(nf,nf+1);

DATOS

% Se evalúa en los tres términos de la ecuación cada valor de x

tipo=input('Poner "0", puntos equiespaciados; Poner "1" si no: ');

for i=1:nf
    if tipo==0
        pc(i)=i*(1/(nf+1));
    else
        pc(i)=3*(i/(nf+1))^2-2*(i/(nf+1))^3;
    end
    x=pc(i)
    Y1(i,:)=eval(Yt1);
    Y2(i,:)=eval(Yt2);
    Tx(i,1)=E2*(eval(tx));
end
```



```

syms x;

DATOS

% Se hace "0" el coeficiente A1 al ser una pala articulada

Y1f(:,1)=Y1(:,1);
Y2f(:,1)=Y2(:,1);

DATOS

Txf(:,1)=eval(Tx(:,1));

for columna=2:nf;
    Y1f(:,columna)=Y1(:,columna+1);
    Y2f(:,columna)=Y2(:,columna+1);
end

% Se resuelve el sistema

Zii=(inv(Y1f-Y2f))*(Txf);
Zi(1)=Zii(1);
Zi(2)=0;
for i=3:nf+1;
    Zi(i)=Zii(i-1);
end

disp('Coeficientes Zi')
Zi

syms x

% Ecuación de la elástica

disp('Ecuación de la elástica')
Yx=sum(Zi.*Fi);
pretty(expand(Yx))

% ESFUERZO.m

% Esfuerzo axil

DATOS

No=int(m0*Q^2*(r+ead),r,0,R-e);
disp('No=')
pretty(No)

DATOS
N=No*sx;
disp('N=')
pretty(N)

```



```
% Esfuerzo cortante

V=(Tp/0.442626)*int(tx,x,x,1);
disp('V=')
pretty(V)

% Momento flector

Mf=EI/(R-e)*expand(diff(Yx,2));
disp('Momento flector=')
pretty(Mf)

DATOS

% Representación de los resultados

% Gráfica de N

figure(1)
subplot(1,1,1)
eval(N);
ezplot(ans,[0,1])
title('ESFUERZO NORMAL')
ylabel('Newtons')
xlabel('Distancia adimensional al eje de giro: x')
hold on

% Gráfica de V

figure(2)
subplot(1,1,1)
eval(V);
ezplot(ans,[0,1])
title('ESFUERZO CORTANTE')
ylabel('Newtons')
xlabel('Distancia adimensional al eje de giro: x')
hold on

% Gráfica de Mf

figure(3)
subplot(1,1,1)
eval(Mf);
ezplot(ans,[0,1])
title('MOMENTO FLECTOR')
ylabel('Newtons*metro')
xlabel('Distancia adimensional al eje de giro: x')
hold on

% Gráfica de la elástica

figure(4)
subplot(1,1,1)
eval(Yx);
ezplot(ans,[0,1])
title('ECUACIÓN DE LA ELÁSTICA')
ylabel('Metros')
```



```

xlabel('Distancia adimensional al eje de giro: x')
hold on

DATOS

EI=(EIyy0-EIyy1)*x/(R-e)+EIyy1;
EA=(EA0-EA1)*x/(R-e)+EA1;

bf=(bf0-bf1)*x/(R-e)+bf1;

DATOS

% Calculo de las deformaciones en ejes globales de la seccion

exo=eval(N/EA);
ky=eval(Mf/(bf*EI));

z=0.12*(bf0-bf1)*x/(2*(R-e))+0.12*bf1/2;

DATOS

% Calculo de las deformaciones en ejes globales del tramo

echio=eval(exo+z*ky);
kchi=eval(ky);

% Calculo de los esfuerzos

Nchi=echio/a(1,1);
Mchi=kchi/d(1,1);

% Calculo tensiones y deformaciones para cada lamina

defm=[a(1,1) 0;a(1,2) 0;0 0;0 d(1,1);0 d(1,2);0 0]*[Nchi;Mchi];

syms a
for i=1:4:4*n
    def90=[defm(1);defm(2);defm(3)]+i*0.1e-3*[defm(4);defm(5);defm(6)];
    def0=[defm(1);defm(2);defm(3)]+(i+1)*0.1e-
3*[defm(4);defm(5);defm(6)];
    def445=[defm(1);defm(2);defm(3)]+(i+2)*0.1e-
3*[defm(4);defm(5);defm(6)];
    def45=[defm(1);defm(2);defm(3)]+(i+3)*0.1e-
3*[defm(4);defm(5);defm(6)];
    ten0=Q0*def0;
    ten90=Q90*def90;
    ten45=Q45*def45;
    ten445=Q445*def445;

    def902=[defm(1);defm(2);defm(3)]-i*0.1e-
3*[defm(4);defm(5);defm(6)];
    def02=[defm(1);defm(2);defm(3)]-(i+1)*0.1e-
3*[defm(4);defm(5);defm(6)];
    def4452=[defm(1);defm(2);defm(3)]-(i+2)*0.1e-
3*[defm(4);defm(5);defm(6)];

```



```

    def452=[defm(1);defm(2);defm(3)]-(i+3)*0.1e-
3*[defm(4);defm(5);defm(6)];
    ten02=Q0*def02;
    ten902=Q90*def902;
    ten452=Q45*def452;
    ten4452=Q445*def4452;
end

T=[cos(a)^2 sin(a)^2 2*cos(a)*sin(a);sin(a)^2 cos(a)^2 -
2*cos(a)*sin(a);-sin(a)*cos(a) sin(a)*cos(a) (cos(a)^2-sin(a)^2)];

a=0;

% Calculo de tensiones en ejes locales

ten012=eval(T)*ten0;
ten0212=eval(T)*ten02;

a=pi/2;

ten9012=eval(T)*ten90;
ten90212=eval(T)*ten902;

a=pi/4;

ten4512=eval(T)*ten45;
ten45212=eval(T)*ten452;

a=-pi/4;

ten44512=eval(T)*ten445;
ten445212=eval(T)*ten4452;

CS=1

% Criterio de Tsai-Hill

TH0=(ten012(1)/(1950e6/CS))^2+(ten012(2)/(48e6/CS))^2+(ten012(3)/(79e6
/CS))^2-((ten012(1)*ten012(2))/(1950e6/CS)^2);
TH90=(ten9012(1)/(1950e6/CS))^2+(ten9012(2)/(48e6/CS))^2+(ten9012(3)/(
79e6/CS))^2-((ten9012(1)*ten9012(2))/(1950e6/CS)^2);
TH45=(ten4512(1)/(1950e6/CS))^2+(ten4512(2)/(48e6/CS))^2+(ten4512(3)/(
79e6/CS))^2-((ten4512(1)*ten4512(2))/(1950e6/CS)^2);
TH445=(ten44512(1)/(1950e6/CS))^2+(ten44512(2)/(48e6/CS))^2+(ten44512(
3)/(79e6/CS))^2-((ten44512(1)*ten44512(2))/(1950e6/CS)^2);

% Gráfica de TH0

figure(5)
subplot(1,1,1)
eval(TH0);
ezplot(ans,[0,1])
title('Criterio de rotura 0')
ylabel('TH0')
xlabel('Distancia adimensional al eje de giro: x')
```



```

hold on

% Gráfica de TH90

figure(6)
subplot(1,1,1)
eval('TH90');
ezplot(ans,[0,1])
title('Criterio de rotura 90')
ylabel('TH90')
xlabel('Distancia adimensional al eje de giro: x')
hold on

% Gráfica de TH45

figure(7)
subplot(1,1,1)
eval('TH45');
ezplot(ans,[0,1])
title('Criterio de rotura 45')
ylabel('TH45')
xlabel('Distancia adimensional al eje de giro: x')
hold on

% Gráfica de TH445

figure(8)
subplot(1,1,1)
eval('TH445');
ezplot(ans,[0,1])
title('Criterio de rotura -45')
ylabel('TH445')
xlabel('Distancia adimensional al eje de giro: x')
hold on

TH02=(ten0212(1)/(1950e6/CS))^2+(ten0212(2)/(48e6/CS))^2+(ten0212(3)/(
79e6/CS))^2-((ten0212(1)*ten0212(2))/(1950e6/CS)^2);
TH902=(ten90212(1)/(1950e6/CS))^2+(ten90212(2)/(48e6/CS))^2+(ten90212(
3)/(79e6/CS))^2-((ten90212(1)*ten90212(2))/(1950e6/CS)^2);
TH452=(ten45212(1)/(1950e6/CS))^2+(ten45212(2)/(48e6/CS))^2+(ten45212(
3)/(79e6/CS))^2-((ten45212(1)*ten45212(2))/(1950e6/CS)^2);
TH4452=(ten445212(1)/(1950e6/CS))^2+(ten445212(2)/(48e6/CS))^2+(ten445
212(3)/(79e6/CS))^2-((ten445212(1)*ten445212(2))/(1950e6/CS)^2);

% Gráfica de TH02

figure(9)
subplot(1,1,1)
eval('TH02');
ezplot(ans,[0,1])
title('Criterio de rotura 02')
ylabel('TH0')
xlabel('Distancia adimensional al eje de giro: x')
hold on

```



```
% Gráfica de TH902
```

```
figure(10)
subplot(1,1,1)
eval('TH902');
ezplot(ans,[0,1])
title('Criterio de rotura 902')
ylabel('TH90')
xlabel('Distancia adimensional al eje de giro: x')
hold on
```

```
% Gráfica de TH452
```

```
figure(11)
subplot(1,1,1)
eval('TH452');
ezplot(ans,[0,1])
title('Criterio de rotura 452')
ylabel('TH45')
xlabel('Distancia adimensional al eje de giro: x')
hold on
```

```
% Gráfica de TH4452
```

```
figure(12)
subplot(1,1,1)
eval('TH4452');
ezplot(ans,[0,1])
title('Criterio de rotura -452')
ylabel('TH445')
xlabel('Distancia adimensional al eje de giro: x')
hold on
```

```
% Gráfica de defm(1)
```

```
figure(13)
subplot(1,1,1)
eval('defm(1)');
ezplot(ans,[0,1])
title('Deformaciones medias (1)')
ylabel('e1')
xlabel('Distancia adimensional al eje de giro: x')
hold on
```

```
% Gráfica de defm(2)
```

```
figure(14)
subplot(1,1,1)
eval('defm(2)');
ezplot(ans,[0,1])
title('Deformaciones medias (2)')
ylabel('e2')
xlabel('Distancia adimensional al eje de giro: x')
hold on
```




```
% Gráfica de defm(3)

figure(15)
subplot(1,1,1)
eval(defm(4));
ezplot(ans,[0,1])
title('Deformaciones medias (4)')
ylabel('k1')
xlabel('Distancia adimensional al eje de giro: x')
hold on

% Gráfica de defm(4)

figure(16)
subplot(1,1,1)
eval(defm(5));
ezplot(ans,[0,1])
title('Deformaciones medias (5)')
ylabel('k2')
xlabel('Distancia adimensional al eje de giro: x')
hold on
```



DINAMICO.m

Este programa realiza el cálculo dinámico de la pala.

Las características de este programa son:

- Permite indicar la masa en la punta de la pala
- Permite introducir el número de modos a estudiar
- Permite introducir el número de armónicos a estudiar
- Devuelve las frecuencias propias, las formas propias y los regímenes de resonancia

A continuación se muestra el programa:

```
% "CALCULO DINAMICO DE UNA PALA DE HELICOPTERO"

% Todas las unidades pertenecen al sistema internacional

disp('PROGRAMA DE CÁLCULO DINÁMICO DE UNA PALA DE HELICOPTERO')

disp('Características geométricas de la viga')

% Longitud de la viga "R"
R=input('Poner longitud de la viga: ')

% Excentricidad "e"
e=input('Poner excentricidad de la viga: ')

% Valor de la cuerda
c1=input('Introducir el valor de la cuerda en la raiz de la pala: ')
c2=input('Introducir el valor de la cuerda en la punta de la pala: ')

% Gráfica de la pala
z=0:R/6:R;
g=(c1+(c2-c1)*z/(R-e))*0.4;
h=0.12*g/0.4;

syms x;
g=(c1+(c2-c1)*x)*0.4;
h=0.12*g/0.4;

% Trabajamos con "x" como variable simbólica y adimensional
syms x;
c=g;
```



```

%Cálculo de los parámetros de la sección
mo=input('Introducir la masa en la raiz de la pala: ')
mp=input('Introducir la masa en la punta de la pala: ')
ma=input('Introducir masa añadida en punta: ')
EIo=input('Introducir la rigidez en la raiz de la pala: ')
EIp=input('Introducir la rigidez en la punta de la pala: ')

mx=(mo+(mp-mo)*x/(R-e));
EIx=(EIo+(EIp-EIo)*x/(R-e));

%Adimensionalización de parámetros
mc=mx/mo;
Ic=EIx/EIo;
eo=e/(R-e);

%Velocidad de rotación y esfuerzo a tracción
Vgiro=input('Poner velocidad de rotación en rpm: ')
H=input('Poner el esfuerzo tractor a vencer por la pala: ')

%Definimos el número de modos de vibración
ifinal=input('Poner el numero de modos de vibracion: ')

%Definimos landa
syms landa;
disp('Landa')
for i=1:ifinal;
    landa(i)=(4*i+1)*pi/4;
end
landa

%Definimos los modos propios de vibracion

%Se define los modos de vibracion yi
y=sin(landa*x);

%Derivacion de yi
y1=diff(y,1);
y2=diff(y,2);

%Parametros de Southwell

%Calculo de Aki
Ak1=int((y1./landa).^2,x,0,1);
Ak2=int(mc*y.^2,x,0,1);

Akif=landa.^2.*(Ak1./Ak2);

%Calculo de Ai
ai1=int(Ic*(y2./landa.^2).^2,x,0,1);
aii=landa.^4.*(ai1./Ak2);

aif=(aii).^(1/2);

```



```

%Calculo de koi
koi1=int((y1./landa).^2,x);
syms koi2;
for x=0
    for j=1:ifinal
        koi2(j)=eval(koi1(j));
    end
end
syms x
koi3=koi1-koi2;
koi4=int(mc*x*koi3,x,0,1);
koif=landa.^2.*(koi4./Ak2);

%Calculo de kli
kli1=int((mc*koi3),x,0,1);
klif=landa.^2.*(kli1./Ak2);

%Obtenemos el valor numerico para cada modo propio de vibracion
for i=1:ifinal
    Aki(i)=eval(Akif(i));
    ai(i)=eval(aif(i));
    koi(i)=eval(koif(i));
    kli(i)=eval(klif(i));
end

disp('"Aki"')
Aki
disp('"ai"')
ai
disp('"koi"')
koi
disp('"kli"')
kli

%Frecuencias propias Wi
Wo=(sqrt((EIo)/(mo*(R-e)^4)))*60/(2*pi);
wio=aif.*Wo;
disp('"wio"')
wio
disp('"Wo"')
Wo

kif=koif+(klif*eo)+Akif*((mp+ma)*R/(mo*(R-e)^2));

%Obtenemos el valor de ki para cada modo propio de vibracion
for i=1:ifinal
    ki(i)=eval(kif(i));
end
disp('"ki"')
ki

Wif=sqrt(wio.^2+Vgiro^2*kif);

%Obtenemos el valor de Wi para cada modo propio de vibracion
for i=1:ifinal
    Wi(i)=eval(Wif(i));
end

```



```

disp('Frecuencias propias')
Wi

%Dibujamos la grafica de la forma propia elegida por el usuario
syms x
for i=1:ifinal

Yx(i)=sin(landa(i)*x)+(sin(landa(i))/sinh(landa(i)))*sinh(landa(i)*x);
    figure(i+1)
    ezplot(Yx(i),[0,1])
    title('FORMA PROPIA')
    xlabel('Distancia adimensional al eje de giro:"x"')
    hold on
end

%Resonancia
%vemos si existe resonancia para los modos y frecuencias obtenidas
disp('Wi/Vgiro')
n=(Wi./Vgiro)

%Tabla de resonancias
armo=input('Poner el numero de armonicos a estudiar: ')
R=zeros(armo,ifinal);
n=zeros(1,armo);
for i=1:ifinal
    for j=1:armo
        n(j)=j;
        if (j)^2<=ki(i)
            R(j,i)=0;
        else
            R(j,i)=eval((wio(i))/((n(j).^2-ki(i))^(1/2)));
        end
    end
end
end
R

```

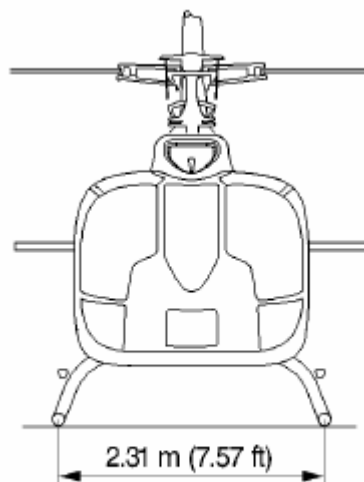
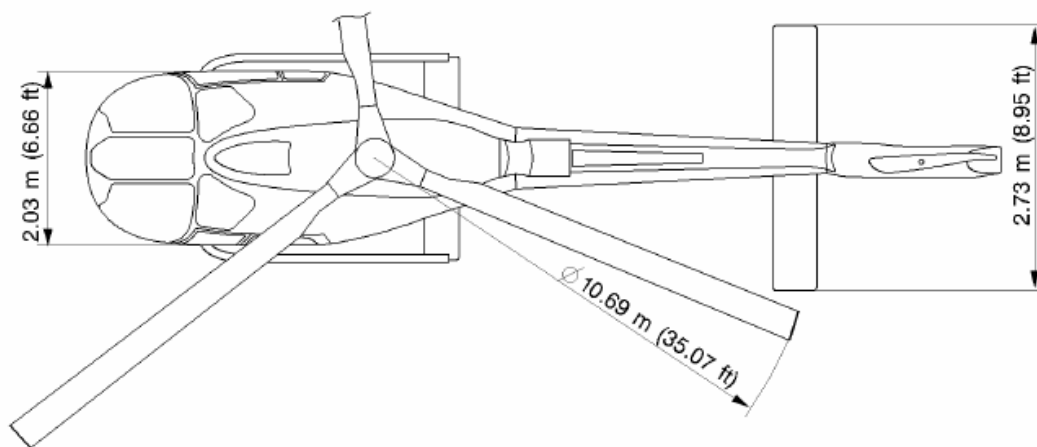
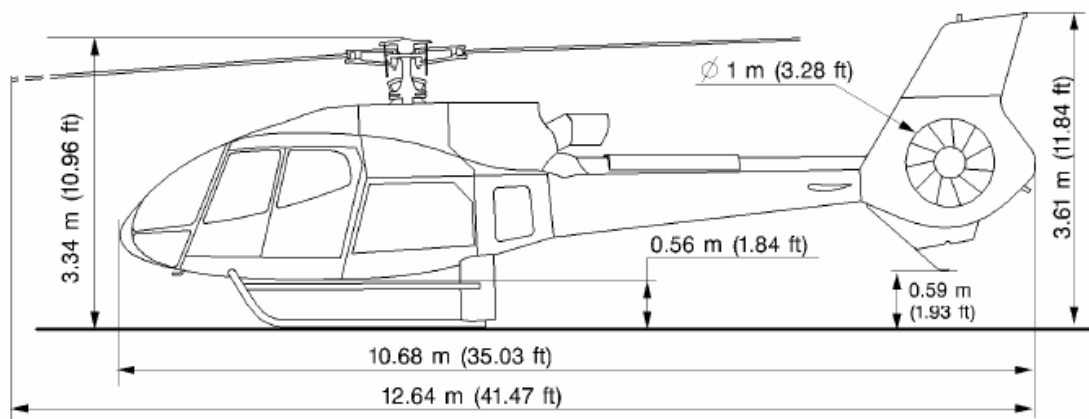


Anexo B

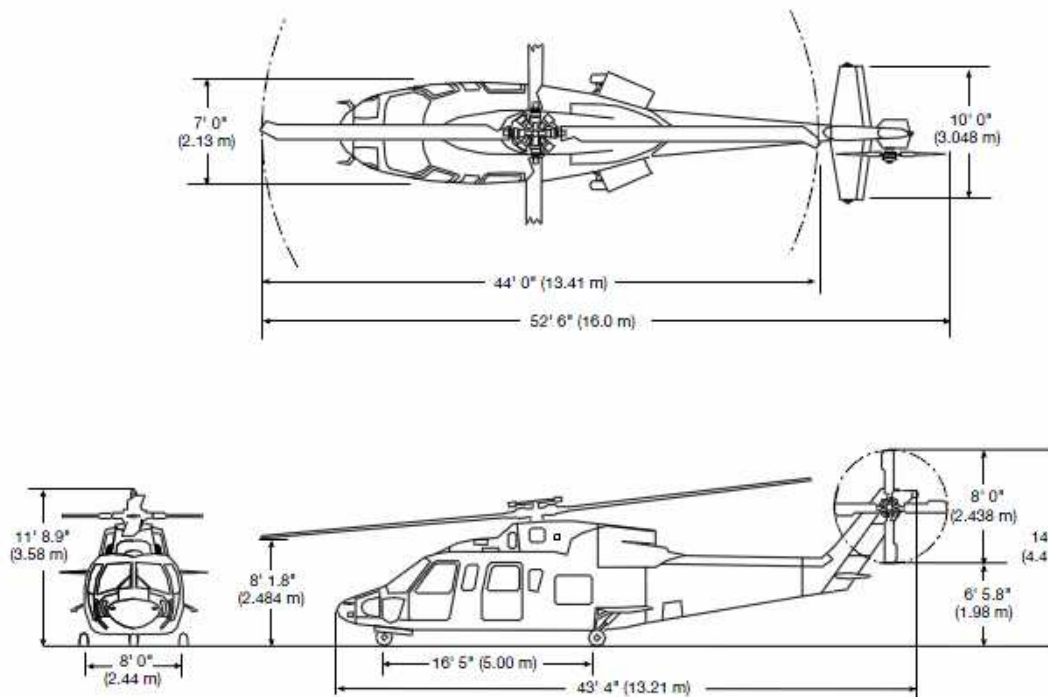
HELICÓPTEROS

EUROCOPTER EC130





SIKORSKY S 76



BELL 429



